

非饱和土壤水一维流动的数值计算

雷志栋 杨诗秀
(清华大学)

非饱和土壤水的流动是指土壤中水分未充满全部孔隙时的水分移动而言的,是多孔介质中流体运动的一种重要形式。由于它在土壤科学、水文学、农田灌溉和排水、水资源评价等方面甚为重要,所以愈为人们所重视。

根据达西定律和连续原理, L. A. Richards (1931) 首先推导出了非饱和土壤水流动的基本方程^[1,2]。对一维问题,基本方程可写为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (1)$$

式中 z 为垂直坐标、取向向下为正, θ 为体积含水量, K 和 D 分别为非饱和土壤水的导水率和扩散率, t 为时间。

非饱和土壤水的一维流动,不仅因相对简单而作为研究的入门,而且本身也有相当重要的实用意义。例如,降雨时水向土中入渗及对地下水的补给,潜水的蒸发,畦灌与喷灌条件下土壤水分的人渗和再分配过程等在较多的情况下都可简化为空间的一维流动。国外一些学者对简单条件下的一维问题,已求得方程(1)的解析解或准解析解^[3]。例如对忽略重力作用的一维水平入渗, Philip 利用 Boltzmann 变换得出解的形式为:

$$\lambda(\theta) = x t^{-1/2} \quad (2.1)$$

且

$$\int_{\theta_a}^{\theta} \lambda(\theta) d\theta = -2D(\theta) / \left(\frac{d\lambda(\theta)}{d\theta} \right) \quad (2.2)$$

式中 θ_a 为均匀分布的初始含水量。在此基础上,对垂直入渗问题,推导出解的形式为:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(\theta) t^{i/2} = \eta_1(\theta) t^{1/2} + \eta_2(\theta) t + \dots \quad (3)$$

式中 $\eta_1(\theta), \eta_2(\theta) \dots$ 仅是含水量 θ 的函数,且 $\eta_1(\theta)$ 即 $\lambda(\theta)$ 。 $\eta_i(\theta)$ 各自应满足一定的方程,且可用迭代法近似解出。在1974年, Philip 等^[4]人又提出了一准解析解的迭代计算方法,对水平入渗,其迭代公式为:

$$\lambda_n = \left[\frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{(\theta - \theta_a) D}{F_n} d\theta \right]^{-1/2} \int_{\theta}^{\theta_b} \frac{D}{F_n} d\theta \quad (4.1)$$

$$F_{n+1} = \int_{\theta_a}^{\theta} \left[\int_{\theta}^{\theta_b} \frac{D}{F_n} d\theta \right] d\theta / \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{(\theta - \theta_a) D}{F_n} d\theta \quad (4.2)$$

式中 θ_b 为边界含水量(假定不变)。计算时先假定 F_1 与 θ 的关系,由迭代公式(4.2)可依次求得 $F_2, F_3 \dots$,直到满足精度要求为止。然后由式(4.1)可求得相应的 λ 与 θ 的关系。

对较复杂的定解边值问题,求解析解是很困难的。六十年代以来,随着电子计算机日益广泛的使用,利用数值计算求解非饱和土壤水的流动问题便迅速发展起来。本文用有限元分析法,编制了一个 BASIC 语言的计算程序,在 DJ-130 机上对某些简单的问题进行了计算。计算结果除用实验结果和 Philip 解验证外,还作了初步分析。

一、非饱和土壤水一维流动的有限元(里兹法)分析

对一维问题,基本方程如(1)。

初始条件为:

$$\theta(z, 0) = \theta_a \text{ 或 } \theta(z, 0) = \theta_a(z) \quad (5)$$

第一类边界条件为边界处含水量 θ_b 已知:

$$\theta(0, t) = \theta_b \text{ 或 } \theta(0, t) = \theta_b(t) \quad (6)$$

第二类边界条件为边界处入渗率 I 已知:

$$\left[K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=0} = I_0 \text{ 或 } \left[K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=0} = I_0(t) \quad (7)$$

以上是对上边界而言,下边界 $z = l$ 处的条件与此类同。

根据变分原理,方程(1)的求解问题等价于按下式给出的泛函 $J[\theta(z, t)]$ 在满足相应边值条件下的极值问题:

$$J[\theta(z, t)] = \int_l \left[\frac{1}{2} D \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \theta \left(\frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right] dz \quad (8)$$

对分析域离散化,即将土柱自 $z = 0$ 始,划分为 $n + 1$ 个单元(段),其节点号依次为 $0, 1, \dots, n + 1$ 。其中 0 和 $n + 1$ 为边界点。

若所划分的单元很小,则每一单元内的含水量的分布可近似为直线,同时还假定 D, K 在单元内也为直线分布。对第 i 单元($i-1 \sim i$)有:

$$\theta = \theta_{i-1} + \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta z_i} (z - z_{i-1}) \quad (9)$$

式中 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ 为距离步长。在时间上采用后向差分,则一单元内的 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ 可表示为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{(\theta'_{i-1} + \theta_i) - (\theta'_{i-1} + \theta'_i)}{2\Delta t_i} \quad (10)$$

式中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 为时间步长,上标“'”表示为前一时刻 $t = t_{i-1}$ 的值。

泛函 J 可表示为各单元泛函之和,对第 i 单元的泛函可表示为:

$$J^i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\frac{1}{2\Delta z_i^2} \left(D_{i-1} + \frac{(D_i - D_{i-1})(z - z_{i-1})}{\Delta z_i} \right) (\theta_i - \theta_{i-1})^2 + \left(\theta_{i-1} + \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})(z - z_{i-1})}{\Delta z_i} \right) \left(\frac{K_i - K_{i-1}}{\Delta z_i} + \frac{(\theta_{i-1} + \theta_i) - (\theta'_{i-1} + \theta'_i)}{2\Delta t_i} \right) \right] dz \quad (11)$$

因此,离散化后,式(8)的泛函 J 简化为以各节点含水量为自变量的多元函数。泛函

取极值的问题便转化为多元函数求极值的问题。于是各节点的含水量应满足下列方程组:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_i} = \frac{\partial J'}{\partial \theta_i} + \frac{\partial J^2}{\partial \theta_i} + \dots + \frac{\partial J^{n+1}}{\partial \theta_i} = 0 \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

第 i 单元泛函 J^i 只与 θ_{i-1} 和 θ_i 有关, 相应的求导公式可用下列单元矩阵表示, 求导时 D , $\frac{\partial K}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ 近似地取为常数:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial J^i}{\partial \theta_{i-1}} \\ \frac{\partial J^i}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial J^i}{\partial \theta_{i-1}} \\ \frac{\partial J^i}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta z_i} \begin{bmatrix} S_{ij} + (D_{i-1} + D_i) & S_{ij} - (D_{i-1} + D_i) \\ S_{ij} - (D_{i-1} + D_i) & S_{ij} + (D_{i-1} + D_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i-1} \\ \theta_i \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2\Delta z_i} [\Delta z_i (K_i - K_{i-1}) - S_{ij} (\theta'_{i-1} + \theta'_i)] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $S_{ij} = \frac{\Delta z_i^2}{2\Delta t_j}$, 为简单起见只讨论等步长的情况, 此时 S_{ij} , Δz_i , Δt_j 的下标可取消, 即

$$S = \frac{\Delta z^2}{2\Delta t}。$$

将式 (13) 代入 (12), 经整理后可得整体矩阵——三对角型的代数方程组:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & & b_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

或简记为

$$[A][\theta] = [H] \quad (14.2)$$

$[A]$ 为 $n \times n$ 的三对角型系数矩阵, $[H]$ 为 $n \times 1$ 常数项列阵, $[\theta]$ 为 $n \times 1$ 含水量列阵。 $[A]$ 和 $[H]$ 中各元素的计算公式如下

$$\left. \begin{aligned} a_i &= S - (D_{i-1} + D_i) \quad i = 2, 3, \dots, (n-1) \\ b_i &= 2S + (D_{i-1} + 2D_i + D_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n \\ c_i &= S - (D_i + D_{i+1}) \quad i = 2, 3, \dots, (n-1) \\ h_i &= S(\theta'_{i-1} + 2\theta'_i + \theta'_{i+1}) - \Delta z(K_{i+1} - K_{i-1}) \quad i = 2, 3, \dots, (n-1) \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

对于第一类边界条件:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= S - (D_1 + D_2) \\ h_1 &= S(\theta'_0 + 2\theta'_1 + \theta'_2) + \Delta z(K_0 - K_2) + \theta_0(D_0 + D_1 - S) \\ a_n &= S - (D_{n-1} + D_n) \\ h_n &= S(\theta'_{n-1} + 2\theta'_n + \theta'_{n+1}) + \Delta z(K_{n-1} - K_{n+1}) + \theta_{n+1}(D_n + D_{n+1} - S) \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

对于第二类边界条件, 可按式 (7) 的差分求得相应的 c_1 , h_1 , a_n 和 h_n 的表达式。

当已知任一时段初各节点的含水量、时段末 (或时段内平均) 各节点的 D 、 K 值及时

段内边界处已知含水量或入渗率,则由(15.1)、(15.2)求得[A]和[H]中的元素,解方程组(14.1),则可得出时段末各节点的含水量值。

二、计算方法与步骤

求解三对角型方程组(14),通常采用“追赶法”,其消元与回代过程有现成公式,故不

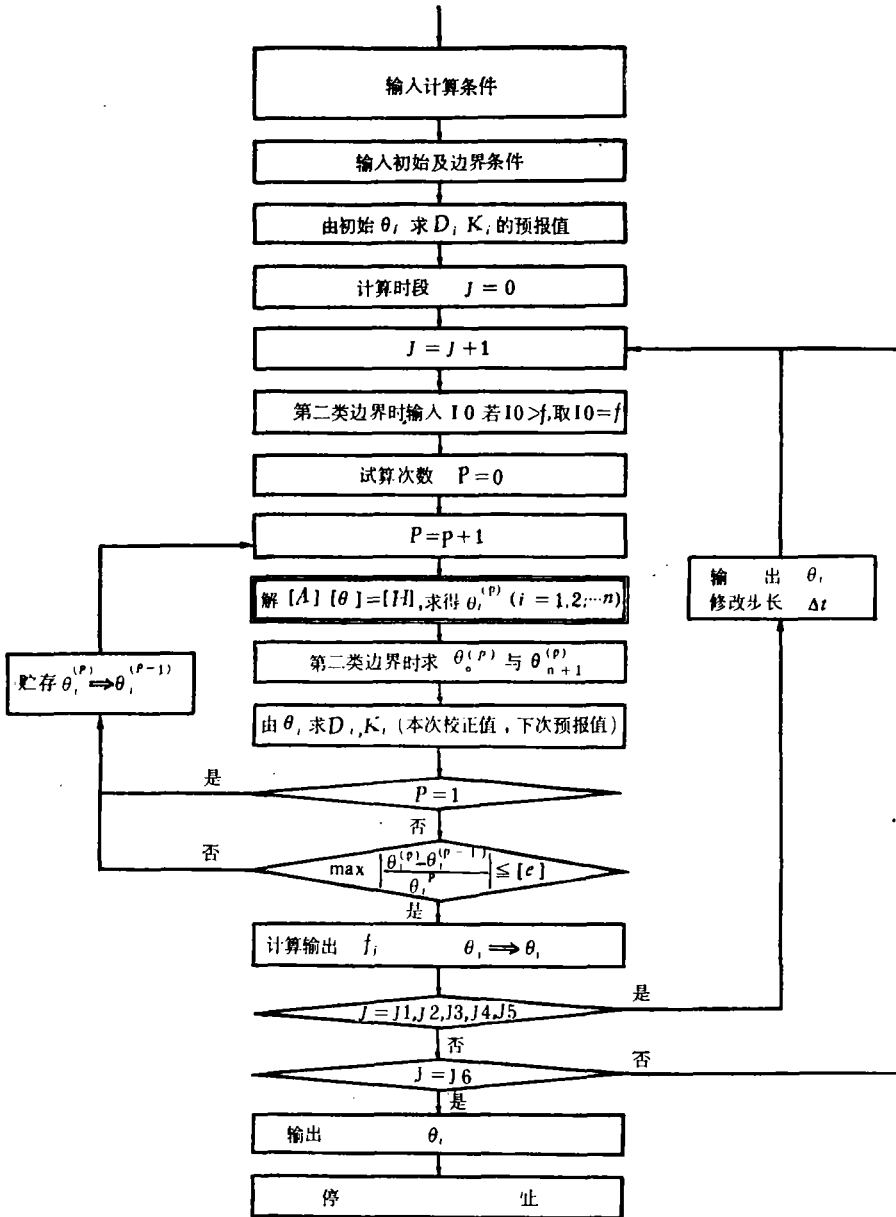


图 1 非饱和土壤水一维流动计算框图

Fig. 1 The chart of the program for one-dimensional flow through unsaturated soils

详述。

由于系数矩阵 $[A]$ 中的元素与所求时段末节点含水量有关, 因此矩阵方程 $[A][\theta] = [H]$ 是非线性的。可用下面三种方法使其线性化。

1. 外推法。由 t_{j-1} 、 t_j 时已知各节点的含水量 $\theta_{i,j-1}$ 和 $\theta_{i,j}$, 线性外推出 $j \sim j+1$ 时段内平均的或时段末的含水量, 查找出相应的 D, K 值。

2. 显式外推法。由 t_j 时已知的各节点含水量 $\theta_{i,j}$, 用显式格式计算出时段内平均的含水量, 查找出相应的 D, K 值。

3. 预报——校正法。首先假定各节点的 D, K 值 (常用时段初的值) 作为 D, K 的预报值。解方程 (14.1) 得各节点含水量的第一次计算值 $\theta_i^{(1)}$, 由 D 与 θ 和 K 与 θ 关系, 得出所需各节点 D, K 的校正值。以此校正值作为 D, K 的下一期预报值, 再解方程求得第二次计算值 $\theta_i^{(2)}$, 由此又可得 D, K 的第二次校正值。重复以上步骤, 直到各节点前后二次计算所得含水量达到所要求的精度为止, 即满足:

$$\max \left| \frac{\theta_i^{(p)} - \theta_i^{(p-1)}}{\theta_i^{(p-1)}} \right| \leq [e] \quad (16)$$

式中 p 为计算次数, $[e]$ 为允许的相对误差。

各时段土壤的入渗率 f_j (单位时间内单位面积上入渗的水量) 由下式求得:

$$f_j = \sum_{i=1}^n (\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}) \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (17)$$

按预报——校正法, 编制了一维流动的计算程序 (图 1)。所谓计算条件是指土壤剖面层级的划分, D 与 θ 和 K 与 θ 关系给出的方式 (数表或公式), 边界条件的类别及其相应的量是否随时间改变等。 J_1, J_2, \dots, J_6 为指定输出含水量计算结果的时间节点号, 并可根据需要改变次后的时间步长。

三、计算的验证

以一土柱的水平入渗为例, 把数值计算结果和实验值、Philip 的解析解和准解析解加以对照比较。

实验和计算的土样为烘干过筛的扰动壤土, 塑性指数为 13.1, 干容重为 1.26, 孔隙度为 0.52。扩散率 D 和导水率 K 与含水量的关系分别由水平土柱和垂直土柱的入渗实验测得。

1. 水平入渗实验结果 实验在水平入渗实验槽内进行, 入渗时间为 540 分, 测得各点含水量如表 1。

2. Philip (1957) 解析解 计算条件: 初始含水量 0.05, 边界含水量 0.46, D 与 θ 的关系如表 2。解式 (2.1) 和 (2.2), 按 Philip 迭代计算程序, 经三次迭代求出。

3. Philip (1974) 准解析解 计算条件同上。按式 (4.1) 和 (4.2), 三次迭代后求出。

4. 数值计算 计算条件同上。计算步长取 $\Delta x = 2$ 厘米、 $\Delta t = 10$ 分。控制预报校正计算次数的允许误差 $[e] = 0.01$ 。

表 1 水平入渗实验各点含水量 ($T = 540\text{min}$)

Table 1 Water content (θ) in different depth (x) in lateral seepage experiment

x (cm)	5	10	15	20	25	30	35	39	41
θ (cm^3/cm^3)	0.453	0.455	0.451	0.445	0.440	0.427	0.427	0.416	0.398
x (cm)	43	45	47	48	49	50	51	55	60
θ (cm^3/cm^3)	0.393	0.381	0.360	0.341	0.270	0.112	0.063	0.050	0.050

注: 由清华大学农田水利实验室提供。

表 2 扩散率 (D) 和水分含量 (θ) 的关系

Table 2 The relationship between diffusivity (D) and water content (θ)

θ (cm^3/cm^3)	0.10	0.20	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	0.42	0.44
D (cm^2/min)	0.012	0.054	0.133	0.215	0.537	0.982	1.562	2.652	5.938	16.289

注: 由清华大学农田水利实验室提供。

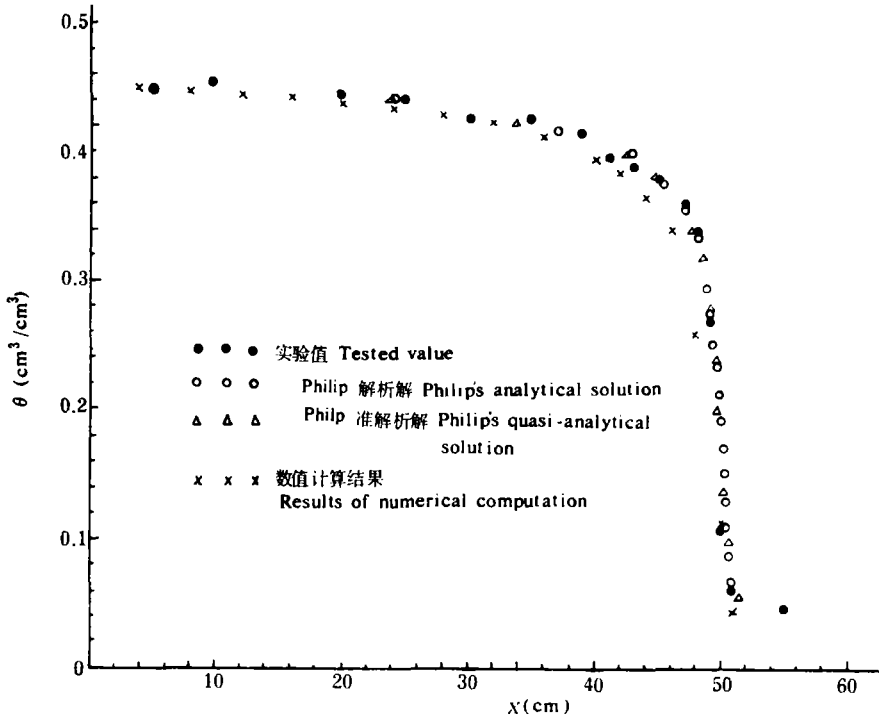


图 2 计算结果的验证

Fig. 2 Verification of the results of numerical computation

由上列四种方法所得的含水量分布见图 2。由图 2 可见，Philip 解析解与准解析解和实验结果十分吻合。数值计算结果和实验值或 Philip 解也是吻合的。这说明按本文所提出的数值计算格式及步长得出的结果具有一定的可靠性。

四、计算实例和初步分析

对非饱和土壤水一维流动的几种简单情况进行了初步计算和分析。土柱的土料为壤土，其塑性指数为 11.8、干容重为 1.365， D, K 值按实验所得经验公式给出（资料来源同前）：

$$\left. \begin{aligned} D &= 42.4(\theta/\theta_s)^{14.05} \text{ (厘米}^2\text{/分)} \\ K &= 0.0414(\theta/\theta_s)^{10.51} \text{ (厘米/分)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中饱和含水量 $\theta_s = 0.485$ 。计算中初始含水量取 0.028，边界含水量取 0.445。

(一) 水平入渗计算

计算步长 $\Delta x = 2$ 厘米，时间步长依次为 10 分、30 分和 60 分。计算结果如下：

1. 含水量分布曲线 计算所得 4、12、24、48 和 72 小时的含水量分布如图 3 中曲线所示。由图可见计算结果和实验值基本符合。

2. 湿润锋 x_F 与时间关系 由式(2.1)得 $x = \lambda(\theta)t^{1/2}$ ，故对一给定含水量，相应的等含水量线（或面）的移动距离 x 和时间的平方根 \sqrt{t} 成正比。湿润锋也应满足这一关

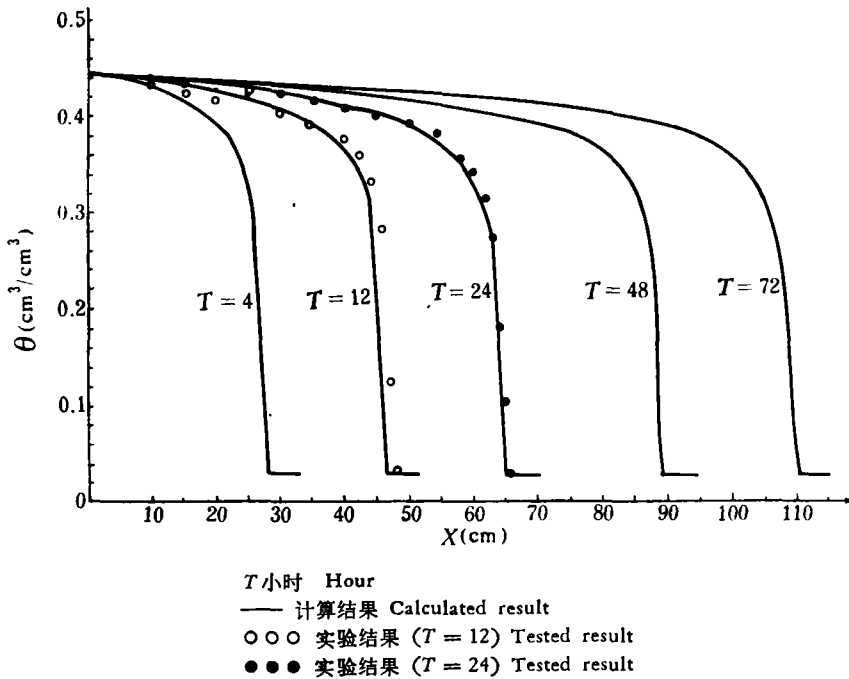


图 3 水平入渗含水量分布曲线

Fig. 3 Curves of distribution of water content for lateral seepage

系:

$$x_F = \lambda(\theta'_a) \cdot t^{1/2} \tag{19.1}$$

式中 x_F 为湿润锋移动距离, θ'_a 代表湿润锋前沿的某一含水量(略高于初始含水量)。现将实验和计算所得 x_F 与 $t^{1/2}$ 关系点绘在图 4 上, 不仅可看到两者是一致的, 而且对本例

$$x_F = 1.67t^{1/2} \tag{19.2}$$

3. 入渗率 f 设 U 为土壤中总的入渗水量, A 为土柱的横断面积, 则

$$U = A \int_{\theta_a}^{\theta_b} x d\theta \tag{20.1}$$

入渗率 $f = \frac{\partial(U/A)}{\partial t}$, 以 (20.1) 式和 $x = \lambda t^{1/2}$ 代入后得

$$f = \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \lambda d\theta / t^{1/2} = c / t^{1/2} \tag{20.2}$$

式中 $c = \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \lambda d\theta$ 为常数, 它和土壤质地、孔隙度及初始和边界含水量有关。对于本

例, 由 λ 与 θ 关系的实验曲线计算得 $\int_{\theta_a}^{\theta_b} \lambda d\theta = 0.6908$, 所以

$$f = 0.3454 / t^{1/2}$$

将 $f = c / t^{1/2}$ 曲线及计算和实验的 f 值点绘于图 5, 可见式 (20.2) 比较好地反映了入渗率 f 随时间变化的关系。

(二) 垂直上渗计算

当地下水位埋深较小时, 土壤不断由地下水位向上吸水。经一定时间后, 在地下水位

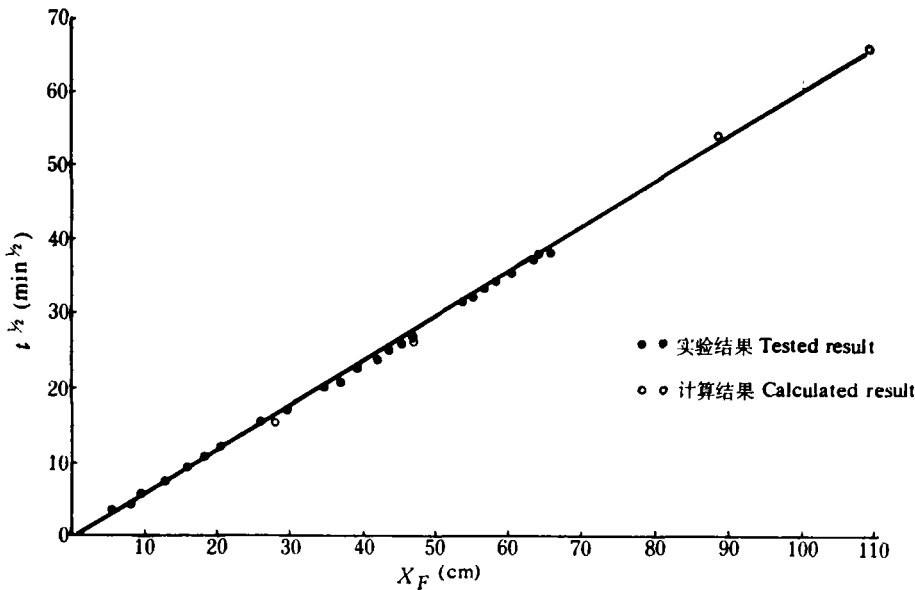


图 4 水平入渗湿润锋 x_F 和时间 $t^{1/2}$ 关系曲线

Fig. 4 The relationship between wetting front (x_F) and time (t) for lateral seepage

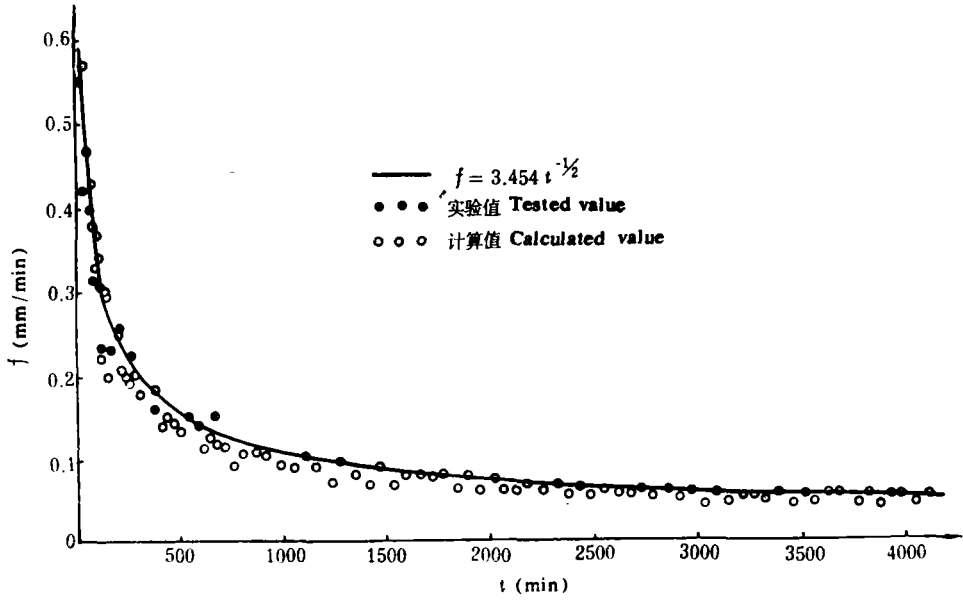


图 5 水平入渗的人渗率 (f) 与时间 (t) 的关系

Fig. 5 The relationship between the rate of lateral seepage (f) and time (t)

以上形成一稳定的含水量分布。这个含水量的分布对于地下水的运动、潜水的蒸发、土壤水的人渗都有直接关系。

由达西定律不难得出：

$$v = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} - K \tag{21}$$

式中 v 为流速， z 取向上为正。当含水量分布达到稳定时应有 $v = 0$ ，又设此时紧靠地下水水面处 ($z = 0$) 土壤含水量为 θ_b ，则稳定含水量分布的定解边值问题是：

$$\begin{cases} D \frac{d\theta}{dz} + K = 0 \\ \theta = \theta_b, z = 0 \end{cases} \tag{22}$$

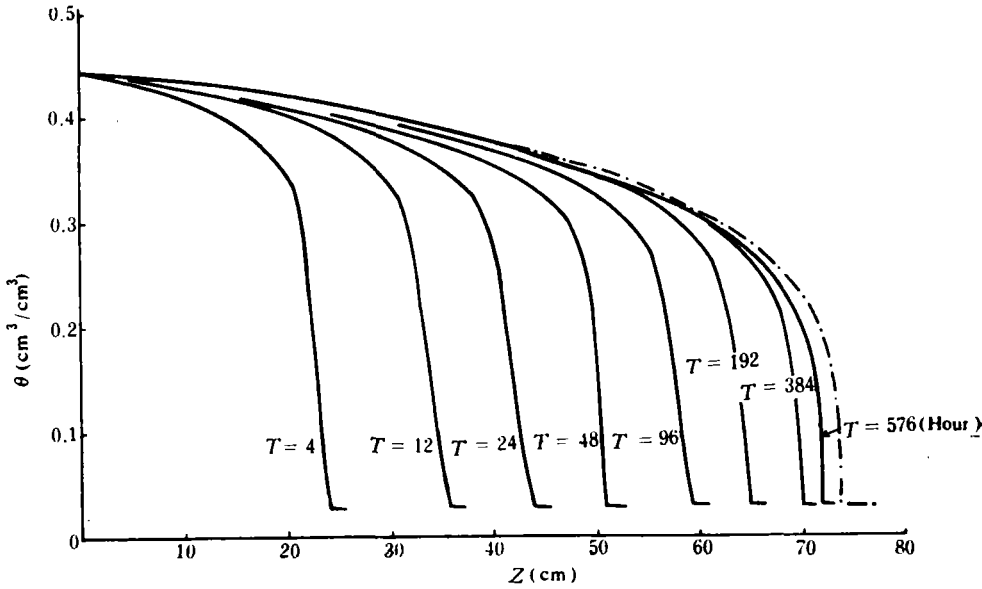
设 $D = D_s(\theta/\theta_s)^\alpha$ ， $K = K_s(\theta/\theta_s)^\beta$ ，对上式求解所得结果为：

$$z = \mu(\theta_b^{\gamma+1} - \theta^{\gamma+1}) \tag{23}$$

式中 $\mu = \frac{D_s}{K_s(1+\gamma)\theta_s^\gamma}$ ， $\gamma = \alpha - \beta$ 。当已知 θ_s 、 θ_b 、 D_s 、 α 、 K_s 、 β 后，由上式便不难计算出地下水位以上稳定的含水量分布 θ 与 z 的关系曲线。

为了验证式 (23) 的正确性，对一土柱进行了垂直上渗计算。计算中取 $\theta_b = 0.445$ ， $\theta_s = 0.028$ ， D 、 K 如式 (18) 给出；步长 $\Delta z = 2$ 厘米， Δt 为变步长，依次为 10、30、60、120、240、480 分。计算所得各个时间的含水量分布及按 (23) 式所计算的稳定含水量分布绘于图 6。

由图 6 可见，计算所得各时间的含水量分布曲线都在稳定含水量分布曲线之内，随时间增长以其作为渐近线的。如当 $T = 576$ 小时 (第 24 天) 时，其含水量分布已十分接近稳定含水量分布，此时经计算所得入渗率已达 2.5×10^{-5} 厘米/分，往后含水量分布曲线的



--- 稳定的含水量分布曲线
 Stable curve of distribution of water content
 — 不同时间含水量分布计算结果
 Calculated result of distribution of water content in different times

图 6 垂直上渗含水量分布曲线

Fig. 6 The curve of distribution of water content for vertical upward flow

前移将是十分有限的。由图 6 还可看到,湿润锋 x_f 随时间 t 的上移,大体上也是以 $x_f = 73.6$ (稳定分布的湿润锋)作为极限的。

因此,上述垂直上渗数值计算结果表明,根据 D 与 θ 和 K 与 θ 关系的经验公式来计算地下水位以上稳定含水量分布曲线的 (23) 式是合适的。

(三) 垂直下渗计算

对于第一类边界条件下的垂直下渗问题进行了计算。土柱的 D 和 θ 的关系、 K 和 θ 的关系、初始及边界含水量同前。计算步长 $\Delta z = 2$ 厘米、 Δt 为 10 和 30 分。

图 7 绘出了 $T = 4$ 小时和 $T = 12$ 小时的人渗含水量分布的计算结果。图中还同时绘出了相应时间的水平入渗的含水量分布曲线(虚线)。

垂直入渗时 $z(\theta, t)$ 关系可由式 (3) 近似表示,若只取级数的前三项,则

$$z = \eta_1(\theta)t^{1/2} + \eta_2(\theta)t + \eta_3(\theta)t^{3/2}$$

上式右端第一项 $\eta_1(\theta)t^{1/2}$ 可视为水平入渗(忽略重力)结果,其余各项之和为垂直下渗和水平入渗的 z 值之差。由水平入渗结果(实验或计算值),可得 η_1 与 θ (即 λ 与 θ) 关系;由图 7 中所示垂直入渗和相应水平入渗之间的差值 Δz ,可计算得 η_2 与 θ 和 η_3 与 θ 关系结果列于表 3。由表 3 可见,表示 $z(\theta, t)$ 的级数 (3) 收敛是很快。因此,在采用式 (3) 时可只取前面有限的几项。

垂直下渗时的人渗水量 $U = A \left[\int_{\theta_a}^{\theta_b} z d\theta + K_s t \right]$, 相应入渗率 $f = \frac{\partial(U/A)}{\partial t}$ 。将式

(3) 代入, 并只取右端前二项, 经整理最后可得:

$$f = c_1 t^{-1/2} + c'_2 \tag{24}$$

式中 $c'_2 = c_2 + K_s$, K_s 为初始含水量所相应的导水率,

$$c_i = \frac{i}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \eta_i d\theta \quad (i = 1, 2, \dots)$$

在图 8 中点绘了计算所得各时段的人渗率, 并以虚线绘出了水平入渗的结果 $f = 3.454t^{-1/2}$ (毫米/分)。因此, 若取 $c'_2 = 0.1$ (毫米/分), 则 $f = 3.454t^{-1/2} + 0.1$ (图中实线) 便能与数值计算的人渗率和时间关系较好吻合。可见式 (24) 在一定程度上反映了垂直下渗时, 入渗率随时间的变化规律。当入渗刚开始时, $c_1 t^{-1/2} \gg c'_2$, 所以近似于水平入渗; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $c_1 t^{-1/2} \rightarrow 0$, 则 $f \approx c'_2$, 即达到一稳定的人渗率, 对于本例约为 0.1 (毫米/分)。

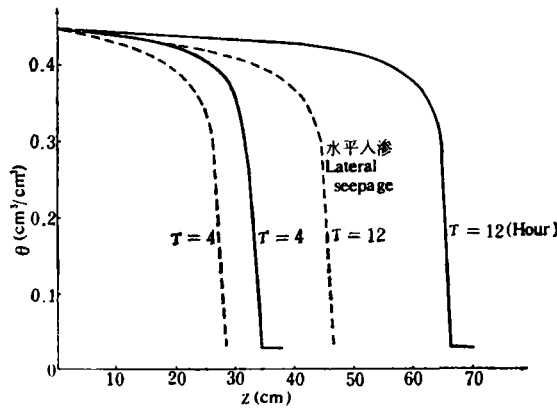


图 7 垂直下渗含水量分布曲线

Fig. 7 The curve of distribution of water content for vertical downward flow

表 3 垂直下渗时 η_1, η_2, η_3 和 θ 的关系

Table 3 The relationship between η_1, η_2, η_3 and water content (θ) in the process of vertical infiltration

$\theta(\text{cm}^3/\text{cm}^3)$	$\eta_1(\text{cm}/\text{min}^{1/2})$	$\eta_2(\text{cm}/\text{min})$	$\eta_3(\text{cm}/\text{min}^{3/2})$
0.445	0	0	0
0.40	1.24	0.0204	0.00043
0.38	1.43	0.0174	0.00049
0.36	1.54	0.0163	0.00043
0.34	1.60	0.0163	0.00043
0.30	1.65	0.0163	0.00043
0.25	1.67	0.0163	0.00043
0.20	1.69	0.0163	0.00043
0.15	1.71	0.0163	0.00043
0.10	1.72	0.0163	0.00043
0.028	1.73	0.0163	0.00043

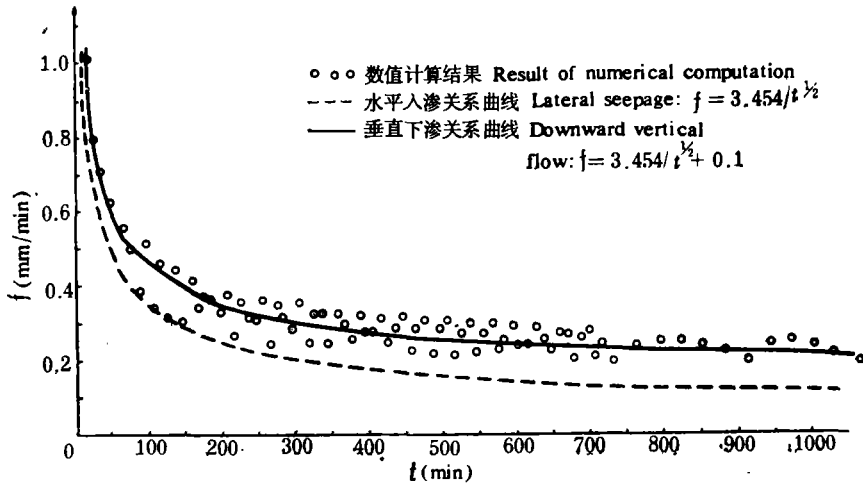


图 8 垂直下渗入渗率 (f) 和时间 (t) 的关系

Fig. 8 The relationship between the rate of vertical downward infiltration (f) and time (t)

五、结 束 语

本文在有限元分析基础上,编制了非饱和土壤水一维流动的计算程序,适于在 DJ-130 机上进行计算。根据计算的结果和实验值及 Philip 的解析解比较,现有的计算格式和步长还能得出满意的结果。对所编程序加以改进后可用于实际计算,但对数值计算的稳定性,收敛性和最优格式的选择等问题需作进一步的研究与论证。

参 考 文 献

- [1] Dewiest, R. J. M., 1969: Flow Through Porous Media. New York. Academic Press
- [2] Hillel Daniel, 1971: Soil and Water. Academic Press. New York.
- [3] Kirkham Don, Powers, W. L., 1972: Advanced Soil Physics. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [4] Philip, J. R. and Knight, J. H., 1974: On solving the unsaturated flow equation 3 New quasi-analytical technique. Soil Sci., 117: 1—13.

NUMERICAL METHOD OF ONE-DIMENSIONAL FLOW THROUGH UNSATURATED SOILS

Lei Zhi-dong and Yang Shi-xiu

(*Qinghua University*)

Summary

The present paper deals with a matrix equation for one-dimensional flow through unsaturated soil derived from the finite element method and a BASIC program which has been applied to solve the problem of lateral seepage in soil in a DJ-130 computer. Better agreement is observed between the results obtained from the equation and the data from experiment as well as Philip's analytical and quasi-analytical solution, and the program is proved applicable. With the aid of this program, the rate of lateral seepage, the relationship between wetting front and time, the vertical infiltration upward from ground-water table and that downward from wetted soil surface are computed and discussed preliminarily.