第 31 卷 第 3 期　　土 壤 学 报　　Vol. 31. No. 3
1994 年 8 月　　ACTA PEDOLOGICA SINICA　　Aug., 1994

非饱和含湿多孔介质在考虑毛细滞后影响时的传热传质理论*

韩吉田　施明恒　虞维平　归柯庭
（东南大学，210018）

摘　　要

本文通过在液体渗流中引入毛细滞后的影响，采用液相运动的最小梯度假设，导出了非饱和含湿多孔介质的含湿饱和度方程、能量方程和气相总压力方程。从而建立了非饱和含湿多孔介质在受毛细滞后影响时传热传质的较普遍理论。

关键词　热质传递，多孔介质，毛细滞后效应

一、引　言

非饱和含湿多孔介质中的传热传质过程是一种非常复杂的现象。由于热湿传递过程受毛细滞后作用的影响而使问题的处理更加困难。实验表明，由于毛细滞后之影响[5]，各种土壤的含水饱和度之不确定度最大可达 20% 以上，可见在许多情况下毛细滞后的影响是很明显的[1]。

虞维平等通过对毛细滞后问题的深入研究，认为毛细管中固一液界面接触角的变化和流体运动滞后的共同作用是产生宏观渗流滞后的原因[2]。局部液体流动的总动力势梯度的模在达到某一临界值之前，毛细管势能转储为液体表面的变形能，直到变形能大于表面接触的最大能量时，势能才开始转变为液体宏观运动的动能。在此基础上，提出了毛细多孔介质的等温渗流理论[3]，合理解释了毛细滞后现象。并通过引入毛细滞后的影响，采用液相运动的最小梯度假设，建立了相应于基本假设的非饱和含湿多孔介质在受毛细滞后影响时热湿传递的理论1)。但是在分析中忽略了压力梯度等因素的影响，使其应用范围受到一定限制。

本文在上述工作基础上，综合考虑了影响热湿传递的各种因素，导出了介质含湿饱和度方程，能量方程和气相总压力方程，从而建立了更普遍的非饱和含湿多孔介质在受毛细滞后影响时热湿传递的理论。

二、基本假设和守恒定律

本文所研究的含湿多孔介质满足下述假设：

---

* 国家自然科学基金资助项目。

1) 虞维平、王补宣、施明恒，1992：考虑毛细滞后效应的未饱和含湿多孔介质传热和传质理论。工程热物理学会第八届年会文集，V25－30 页。

（1）多孔介质宏观上是各向同性的连续介质(虚拟连续介质)；

（2）固体骨架是刚性的；

（3）多孔介质中三相处在热力学平衡状态；

（4）气相(空气、水蒸汽)可当作理想气体；

（5）气相运动满足达西定律，液相运动服从液体渗流的最小梯度假设；

（6）流体中压缩功和粘性耗散效应不计；

液体渗流的最小梯度假设为：在非饱和多孔介质的流体渗流过程中，存在一最小动力势梯度 G_0，它仅是液体饱和度的函数，当实际动力势梯度 $\vec{G}$ 的模 $\|\vec{G}\| \geq G_0$ 时，渗流才会发生，且服从达西定律；而当 $\|\vec{G}\| < G_0$ 时，渗流是不可能的[3]。

将质量守恒定律应用于多孔介质任一表征性体积单元（REV）中的骨架（m）、空气（a）、水蒸汽（V）、和液态水（l）：

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_i \phi_i) = -\nabla \cdot \vec{J}_i + S_i \ (i = m、a、V, l) \tag{1}$$

式中 ρ_i、ϕ_i、$\vec{J}_i$、S_i 分别为第 i 组分的质量密度、体积率(组分体积/单元体积)、质量流矢量和质量源，τ 为时间。

再将能量守恒定律应用于表征性体积单元：

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\sum_i \rho_i \phi_i h_i\right) = -\nabla \cdot \left(\sum_i h_i \vec{J}_i\right) + \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T) + q_v \tag{2}$$

上式的意义是：单元中能量变化率＝流入的显热通量＋导入的热量＋体积发热。

式中 h_i 为组分的比焓，T 为温度，λ^* 为含湿多孔介质的名义导热系数，它应包括骨架、气相和液相的导热作用，还应计入其它与流体宏观运动无关的换热效应，如空隙中的微小自然对流换热等；q_v 为介质单位体积的发热率。

三、质流矢量的确定

根据基本假设(2)，固相的质流矢量为零：

$$\vec{J}_m = 0 \tag{3}$$

在有些介质中，固体骨架会随温度变化而发生热胀冷缩；还有些介质在吸湿和排湿过程中会出现体积的胀缩，在这种情况下，固相的质流将取决于温度和湿度的变化。本文不考虑这种情况。

（一）液相水质流矢量

根据达西定律[4]，液相水质流矢为：

$$\vec{J}_l = \rho_l \vec{V}_l = -\frac{\rho_l K_l}{\mu_l}(\nabla P_l - \rho_l \vec{g}) \tag{4}$$

式中 K_l 为介质的比渗透率，μ_l 为水的动力粘度，$\vec{g}$ 为重力加速度矢量。

而介质中液相压力 P_l、气相压力 P_g 与毛细压力 P_c 存在如下关系：

$$P_c = P_g - P_l \tag{5}$$

所以，

$$\vec{J}_l = -\frac{\rho_l K_l}{\mu_l}(\nabla P_g - \nabla P_c - P_l\vec{g}) \tag{6}$$

由上式知,液相水运动的总动力势梯度为:

$$\vec{G} = \nabla P_g - \nabla P_c - \rho_l\vec{g} \tag{7}$$

现考虑毛细滞后的影响,采用液相运动的最小梯度假设,式(6)可改写为:

$$\vec{J}_l = -\frac{\rho_l K_l}{\mu_l}\vec{G}\frac{\|\vec{G}\| - \eta G_0}{\|\vec{G}\|} \tag{8}$$

式中 G_0 为最小梯度的模, η 的定义为:

$$\eta = \begin{cases} \|\vec{G}\|/G_0, & \|\vec{G}\| < G_0 \\ 1, & \|\vec{G}\| \geq G_0 \end{cases} \tag{9}$$

可将上式简写为:

$$\eta = \frac{\min(\|\vec{G}\|, G_0)}{G_0} \tag{10}$$

对于各向同性的均匀介质,毛细压力 P_c 为介质中液相含量和温度的函数,即

$$P_c = P_c(\phi_l, T) \tag{11}$$

由式(7)可得:

$$\vec{G} = \nabla P_g - \frac{\partial P_c}{\partial \phi_l}\nabla\phi_l - \frac{\partial P_c}{\partial T}\nabla T - \rho_l\vec{g} \tag{12}$$

所以,

$$\vec{J}_l = -\frac{\rho_l K_l}{\mu_l}(\vec{G} - \eta G_0\vec{I}) = -\frac{\rho_l K_l}{\mu_l}\left(\nabla P_g - \frac{\partial P_c}{\partial \phi_l}\nabla\phi_l - \frac{\partial P_c}{PT}\nabla T - \rho_l\vec{g} - \eta G_0\vec{I}\right) \tag{13}$$

式中

$$\vec{I} = \frac{\vec{G}}{\|\vec{G}\|} \tag{14}$$

$\vec{I}$ 为与 $\vec{G}$ 同方向的单位矢量。

(二)空隙中水蒸汽和空气质流矢量

空隙中的空气与水蒸汽是以湿空气形式存在的。对于湿空气,其质流矢量据达西定律:

$$\vec{J}_g = \rho_g\vec{V}_g = -\frac{\rho_g K_g}{\mu_g}(\nabla P_g - \rho_g\vec{g}) \tag{15}$$

式中 K_g、μ_g、ρ_g 分别为湿空气的比渗透率、动力粘度和密度。

水蒸汽流应包括随气相的对流、在浓度梯度下的分子扩散和在温度梯度下的热质扩散三部分:

$$\begin{aligned} \vec{J}_v &= \rho_v\vec{V}_g - \rho_g D_v\beta(\nabla\omega_v + \delta_v\nabla T) \\ &= \omega_v\vec{J}_g - \rho_g D_v\beta(\nabla\omega_v + \delta_v\nabla T) \end{aligned} \tag{16}$$

式中 $\omega_v = \frac{\rho_v}{\rho_g}$ 为湿空气中水蒸汽的质量成分, δ_v 为蒸汽的热梯度系数, D_v 为水蒸汽在湿空气中的质扩散系数, β 为气相扩散的面积修正系数。

上式可改写为:

$$\vec{J}_v = -\frac{\rho_v K_g}{\mu_g}(\nabla P_g - \rho_g \vec{g}) - \frac{D_v M_v \beta}{RT}(\nabla P_v - Y_v \nabla P_g) - \rho_g D_v \beta \delta_v \nabla T \tag{17}$$

式中 $Y_v = \frac{P_v}{P_g}$， R 为通用气体常数，M_v 为水蒸汽的分子量。

在非饱和含湿多孔介质中，蒸汽压力是液体含量和温度的函数，即

$$\nabla P_v = \frac{\partial P_v}{\partial \phi_l} \nabla \phi_l + \frac{\partial P_v}{\partial T} \nabla T$$

将上式代入(17)式，

$$\vec{J}_v = -\frac{\rho_v K_g}{\mu_g}(\nabla P_g - \rho_g \vec{g}) - \frac{D_v M_v \beta}{RT}\left(\frac{\partial P_v}{\partial \phi_l} \nabla \phi_l + \frac{\partial P_v}{\partial T} \nabla T - Y_v \nabla P_g\right) - \rho_g D_v \beta \delta_v \nabla T \tag{18}$$

同理可得到空气的质流矢量：

$$\vec{J}_a = -\frac{\rho_a K_g}{\mu_g}(\nabla P_g - \rho_g \vec{g}) + \frac{D_a M_v \beta}{RT}\left(\frac{\partial P_v}{\partial \phi_l} \nabla \phi_l + \frac{\partial P_v}{\partial T} \nabla T - Y_v \nabla P_g\right) - \rho_g D_a \beta \delta_a \nabla T \tag{19}$$

其中推导中利用了 $\omega_a + \omega_v = 1$ 这一关系。

式中 D_a 为空气在湿空气中的扩散系数，δ_a 为空气的热梯度系数。

四、质量源的确定

根据基本假设(2)，固相质量源为零：

$$S_m = 0 \tag{20}$$

即液相中无固性颗粒沉积。

由于空气不发生相变，则 $S_a = 0$ (21)

而在多孔介质中水蒸汽和液态水之间可发生相变而出现质量源，且

$$S_v + S_l = 0 \tag{22}$$

水蒸汽的质量源为：

$$S_v = \rho_g \phi_g \frac{\partial \omega_v}{\partial \tau} = \rho_g \phi_g \left(\frac{\partial \omega_v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega_v}{\partial P_g} \cdot \frac{\partial P_g}{\partial \tau}\right) \tag{23}$$

五、传热传质微分方程

为了节省篇幅，此处只导出总含湿度方程，能量方程和气相总压力方程。至于分相湿迁移方程则不难从前面的推导中得出。

（一）湿迁移方程

引入介质含湿饱和度 S，其定义为介质总含湿量与水饱和时含湿量之比。于是下式成立：

$$n P_l S = \rho_l \phi_l + \rho_v \phi_v \tag{24}$$

式中 n 为介质空隙率。

由(1)式,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho_l\phi_l+\rho_v\phi_v)=-\nabla\cdot(\vec{J}_l+\vec{J}_v) \tag{25}$$

将 $\vec{J}_l$ 和 $\vec{J}_v$ 的表达式代入上式,并注意到 $\phi_l\approx nS$,可得到如下总含湿量迁移方程:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}=\nabla\cdot(D_m\nabla S+D_t\nabla T+D_p\nabla P_g+K\vec{g}+\eta G_0'\vec{I}) \tag{26}$$

式中 D_m、D_t、D_p、K 分别为质扩散系数、热质扩散系数、渗滤质扩散系数和水力传导系数:

$$D_m=\frac{D_vM_v\beta}{n\rho_lRT}\frac{\partial P_v}{\partial S}-\frac{K_l}{n\mu_l}\cdot\frac{\partial P_c}{\partial S} \tag{27}$$

$$D_t=\frac{\rho_vD_v\beta\delta_v}{nP_l}+\frac{D_vM_v\beta}{nP_lRT}\frac{\partial P_v}{\partial T}-\frac{K_l}{n\mu_l}\cdot\frac{\partial P_c}{\partial T} \tag{28}$$

$$D_p=\frac{K_l}{n\mu_l}+\frac{\rho_vK_g}{n\mu_g\rho_l}-\frac{D_vM_v\beta}{n\rho_lRT}Y_v \tag{29}$$

$$K=-\left(\frac{\rho_lK_l}{n\mu_l}+\frac{\rho_v\rho_gK_g}{n\rho_l\mu_g}\right) \tag{30}$$

式(26)中 $$G_0'=-\frac{K_l}{n\mu_l}G_0 \tag{31}$$

(二)能量方程

引入组分比热容 $c_i=\frac{dh_i}{dT}$,并将质量守恒方程(1)代入(2)式,则:

$$\sum_i\rho_i\phi_ic_i\frac{\partial T}{\partial\tau}+\sum_ih_iS_i=-\sum_i\nabla h_i\cdot\vec{J}_i+\nabla\cdot(\lambda^*\nabla T)+q_v \tag{32}$$

再将(23)、(13)、(18)、(19)式代入上式,并注意到:$\nabla h_i=c_i\nabla T$,经整理后可得到下述能量方程:

$$\rho^*\cdot c^*\frac{\partial T}{\partial\tau}=(\xi\nabla T+\alpha\nabla S+\lambda\nabla P_g+K_t\vec{g}+K_i\eta G_0\vec{I})\cdot\nabla T$$

$$+\nabla\cdot(\lambda^*\nabla T)+q_v+K_p\frac{\partial P_g}{\partial\tau} \tag{33}$$

式中 ξ、α、λ 分别为非线性导热系数、质热传导系数和渗滤质热传导系数。

上式各系数的表达式如下:

$$\xi=-\frac{C_l\rho_lK_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c}{\partial T} \tag{34}$$

$$\alpha=-\frac{C_l\rho_lK_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c}{\partial S} \tag{35}$$

$$\lambda=\frac{C_l\rho_lK_l}{\mu_l}+\frac{C_g\rho_gK_g}{\mu_g} \tag{36}$$

$$K_s = -\left[\frac{C_l\rho_l^2 K_l}{\mu_l} + \frac{C_g\rho_g^2 K_g}{\mu_g}\right] \tag{37}$$

$$K_l = -\frac{C_l\rho_l K_l}{\mu_l} \tag{38}$$

$$K_p = \frac{\gamma\rho_v\phi_g}{P_g} \tag{39}$$

式(33)中的 ρ^* 为表征性体积单元的名义密度，C^* 为名义比热，其定义为：

$$C^* = \frac{1}{\rho^*}\left(\sum_i \rho_i\phi_i C_i + \gamma\rho_g\phi_g\frac{\partial\omega_v}{\partial T}\right) \tag{40}$$

其中 $r = h_v - h_l$ 为水的汽化潜热。

3 气相总压力方程

由式(1)可得：

$$\frac{\partial(\rho_v\phi_v)}{\partial\tau} = -\nabla\cdot\vec{J}_v + S_v \tag{41}$$

因为在多孔介质中水蒸汽的含量相对液态水来说很小，可以认为上式右边等于零，则：

$$S_v = \nabla\cdot\vec{J}_v = \nabla\cdot\left[-\frac{\rho_v K_g}{\mu_g}(\nabla P_g - \rho_g\vec{g}) - \frac{D_v M_v\beta}{RT}\left(\frac{\partial P_v}{\partial S}\nabla S + \frac{\partial P_v}{\partial T}\nabla T\right.\right.$$
$$\left.\left. - Y_v\nabla P_g - \rho_g D_v\beta\delta_v\nabla T\right]\right. \tag{42}$$

将(23)式与上式联立即可得到气相总压力方程：

$$\frac{\partial P_g}{\partial\tau} = \frac{P_g}{\rho_v\phi_g}\nabla\cdot(a_p\nabla P_g + a_s\nabla S + a_t\nabla T + a_g\vec{g}) + a_\tau\frac{\partial T}{\partial\tau} \tag{43}$$

式中

$$a_p = \frac{\rho_v K_g}{\mu_g} - \frac{D_v M_v\beta}{RT}Y_v \tag{44}$$

$$a_s = \frac{D_v M_v\beta}{RT}\frac{\partial P_v}{\partial S} \tag{45}$$

$$a_t = \rho_g D_v\beta\delta_v + \frac{D_v M_v\beta}{RT}\frac{\partial P_v}{\partial T} \tag{46}$$

$$a_g = -\frac{\rho_v K_g\rho_g}{\mu_g} \tag{47}$$

$$a_\tau = \frac{P_g\rho_g}{\rho_v}\frac{\partial\omega_v}{\partial T} \tag{48}$$

六、讨　论

上面导出的描述非饱和含湿多孔介质在考虑毛细滞后影响时的热质传递方程组，综合考虑了影响热质迁移的各种因素，具有较普遍的意义；且方程中的特性系数均有明确的

表达式，便于定性和定量地研究热湿迁移特性的影响因素及其变化规律，并为进一步发展确定热湿迁移特性的有效实验方法提供了依据。在具体应用中，有两方面的问题需要解决：一是方程中迁移特性系数的确定，其中包括最小梯度的确定；另一个是控制微分方程的具体求解。前者的解决已取得了一定进展[1]，而后者的主要困难在于如何随时判断渗流条件。关于迁移特性的具体实验研究及控制方程具体求解的内容，我们将在另文详细报道。

参 考 文 献

1. 沈荣开，1993：非饱和土壤水运动滞后效应的研究。土壤学报，第 30 卷 2 期，208—215 页。
2. 虞维平、王补宣、施明恒，1990：非饱和多孔介质毛细滞后的成因分析。工程热物理论文集，329—332 页，西安交通大学出版社。
3. 虞维平、王补宣、施明恒等，1992：多孔介质非饱和渗流的阈梯度理论。工程热物理学报，第 13 卷 1 期，74—76页。
4. Whitaker. S. 1977: Simultaneous Heat、Mass and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying. Advances Heat Transfer, V13:119—203.
5. Levertt, M.C., 1941: Capillary behavior in Porous Solids, Tran. AIME, 142:213—222.

THEORY OF HEAT AND MASS TRANSFER IN UNSATURATED WET POROUS MEDIA CONSIDERING EFFECT OF CAPILLARY HYSTERESIS

Han Jitian, Shi Mingheng, Yu Weiping and Gui Keting
(Southeast University, Nanjing 210018)

Summary

In this paper, by means of the minimum gradients theory for unsaturated flow in capillary porous media, the equations governing the moisture saturation, energy and total pressure of moist air in unsaturated wet porous media are developed. Therefore, a general theory of heat and moisture transfer in unsaturated wet porous media considering the effect of capillary hysteresis is established.

Key words Heat and mass transfer, Porous media, Effect of capillary hysteresis

1) 虞维平、王素美、施明恒等，1991：测定非饱和多孔介质毛细压力和最小梯度的竖管稳态法。工程热物理学会传质学术会议论文集，V37—42 页。