

# 黄土区考虑滞后作用的坡地 水量转化模型\*

刘贤赵 康绍忠

(中国科学院水土保持研究所, 陕西杨陵 712100)  
水利部

**摘要** 建立了考虑滞后作用的坡地水量转化数学模型, 并对模型不同情况下的定解条件进行了分析。利用陕西长武王东沟小流域坡地天然降雨-入渗-产流的实测资料对模型进行了系统检验, 结果表明该模型具有较高精度, 考虑滞后作用时的模拟值更加接近实测值。在降雨入渗过程中, 滞后作用对土壤含水率、入渗速率、径流过程、产流量都有相当大的影响。

**关键词** 坡地, 水量转化, 数学模型, 滞后作用

**中图分类号** S152.7

坡地水量转化问题已有较多研究<sup>[1~8]</sup>, 但这些研究未考虑降雨入渗产流时滞后作用的影响, 其结果与实际有一定的差距。滞后作用是存在于许多物理现象中具有广泛外延的一个物理概念。所谓土壤水滞后作用是指土壤含水率不是基质势的单值函数, 其取决于土壤的吸湿或脱湿历史。滞后作用不仅影响蒸发条件下的土壤水分再分布过程, 而且还影响降雨-入渗-产流过程。因此, 在坡地水量转化数学模型中考虑滞后作用具有重要的实际意义。

## 1 模型的基本假设

土壤是由水、气和直径不一、形状不规则的固体颗粒组成的。连通性对于固体颗粒所包含的流体的性质和运动特性有极大的影响, 从而对土壤的物理机械性和土壤水分运动参数产生了极大的空间和时间变异性, 加上坡地这种特殊的下垫面机制, 使坡地水量转化问题更趋复杂。为简化研究, 在模型中特做如下基本假设:

- (1) 忽略土壤中的空气, 土壤由固相、液相和空隙组成, 土壤中各点的温度相同;
- (2) 在不考虑表层土壤结壳的基础上, 未做任何扰动的土壤是均质的, 并且不存在不连通孔隙, 土壤水的基质势是连续变化的;
- (3) 土壤中的水是不可压缩的纯水;

\* 国家杰出青年科学基金项目(批准号49725102)资助

收稿日期: 1998-11-17; 收到修改稿日期: 1999-08-04

(4) 坡度、宽度及地表粗糙度基本均匀,水流对地表的摩擦损失与水流的斜面重力分量相等,微小区间内水是匀速运动的;

(5) 忽略降雨引起的附加压力和沿雨滴打击方向的流速分量。

## 2 考虑滞后作用的坡地水量转化数学模型

### 2.1 数学模型

在上述基本假设的条件下,根据非饱和土壤水运动的 Darcy 定律、质量守恒定律以及运动波理论,忽略植物根系吸水,考虑滞后作用的坡地水量转化数学模型可写成:

$$\begin{cases} c(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right] - \frac{\partial k(\varphi_m)}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial k(\varphi_m)}{\partial z} \cos \alpha \\ \frac{\partial d}{\partial t} + v \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial v}{\partial x} = b R_a(t) - f(x, t) \\ v = \frac{1}{n} \sqrt{\sin \alpha} d^{2/3} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $c(\varphi_m)$ —比水容;  $\varphi_m$ —土壤水基质势,饱和时  $\varphi_m = 0$ ;  $k(\varphi_m)$ —土壤导水率;  $t$ —时间;  $\alpha$ —坡面坡度;  $d$ —坡面水深;  $v$ —坡面流速;  $n$ —坡面有效糙率;  $x$ —距坡顶的距离;  $z$ —从地表向下的垂直距离;  $b$ —植被截留衰减系数(设为常数,在植物生育期,  $b$  应为时间的函数,但在某一次降雨过程中,其变幅不是太大,又其值较雨强和土壤入渗率小,故设为常数);  $R_a(t)$ —坡面承雨强度<sup>1)</sup>;  $f(x, t)$ —坡面入渗速率。

### 2.2 数学模型的定解条件

(1) 初始条件。给定土壤初始含水率分布,坡面水深为零,用式表示为:

$$\begin{cases} \varphi_m(x, z, t) = \varphi_{ma}(x, z), t = 0 \\ d(x, t) = 0, v(x, t) = 0, t = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\varphi_{ma}(x, z)$  为初始基质势,其它符号含义同前。

(2) 边界条件。模型的边界条件如图 1 所示。由于黄土地区地下水埋藏较深,地下水对土壤水分运动的影响较小,因此定义  $Z$  方向的下边界 BC 为:

$$\varphi_m(x, z, t) = \varphi_{ma}(x, z), z = H \quad (3)$$

式中  $H$  为土层深度。上边界 OA 为一动态边界,可分三种情况处理,即:

1) 坡面承雨强度是指单位时间内的坡面承雨量。即  $R_a(t) = \frac{dp_a}{dt}$ , 式中  $p_a$  是坡面承雨量。坡面承雨量是指降落在某一下垫面上的降雨量与其承雨面积的比值。由于降雨的随机性,在绝大多数情况下,降雨时常伴随有风,雨滴飘拂不定,雨点降落轨迹不是垂直的而是倾斜的。因此在计算坡面承雨强度时,要综合考虑降雨时的风速、风向、坡长、坡度、坡向等多种因素的影响。本文在综合考虑各种因素的基础上,结合当时的实验情况,坡面承雨强度等于降雨强度。因此,坡面承雨强度是一个变量,不是一个定值。

$$\begin{cases} \varphi_m(x, z, t) = \varphi_{ms}, z = 0, (\text{积水入渗}) \\ -k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + k(\varphi_m) \cos \alpha = b R_a(t) (\text{非积水入渗}) \\ -k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + k(\varphi_m) \cos \alpha = -E(x, t) (\text{蒸发}) \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\varphi_{ms}$  为饱和含水率对应的基质势,  $E(x, t)$  为蒸发速率。

OC 边界位于坡顶分水岭处, 其水分通量为零。在 AB 边界, 当坡面坡角  $\alpha$  比较小时, 即  $\sin \alpha = 0$ , 且以垂向运移为主。它们的边界条件可定义为:

$$\begin{cases} -k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + k(\varphi_m) \sin \alpha = 0, x = 0 \\ -k(\varphi_m) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + k(\varphi_m) \sin \alpha = 0, x = L \end{cases} \quad (5)$$

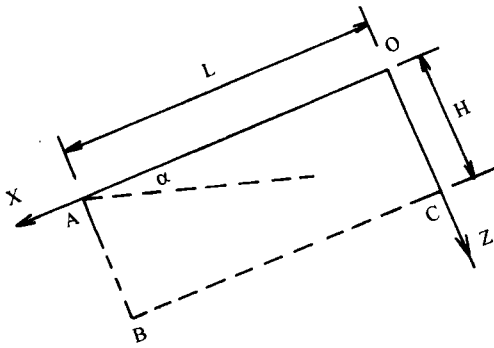


图1 模型边界条件示意图

Fig.1 Sketch of boundary conditions of the model

van Genuchten<sup>[11]</sup>推荐的经验公式

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha h)^n]^m} \quad (7)$$

对  $h$  求导即得非饱和土壤比水容

$$c(\theta) = -\frac{d\theta}{dh} = nma^n h^{n-1} (\theta_s - \theta_r) [1 + (\alpha h)^n]^{-(m+1)} \quad (8)$$

式(7)、(8)中,  $h$ —土壤水基质势,  $\theta_s$ —饱和含水率,  $\theta_r$ —残留含水率,  $a, n, m$ —VG 方程中用最小二乘法拟合的参数。根据实测资料可求得主吸湿过程和主脱湿过程的容水度。

当考虑滞后效应时, 含水率和基质势的函数关系因土壤水分运动的历史过程而异。当土壤水分运动为主脱湿或为主吸湿时,  $c(\theta)$  的计算仍采用式(8), 但当土壤水分处于扫描过程时, 需根据 Mualem<sup>[12]</sup>提出的经过修正的扫描通式来计算, 扫描通式为:

$$\theta_i = \theta_{i-1} + F_1(\varphi'_i) F_2(\varphi_i) \quad (9)$$

$$F_1(\varphi'_i) = [\theta_s - \theta_d(\varphi'_i)] / [\theta_s - \theta_w(\varphi'_i)] \quad (10)$$

$$F_2(\varphi_i) = \theta_w(\varphi_i) - \theta_w(\varphi_{i-1}) \quad (11)$$

其中

式中  $L$  表示坡长。在坡面漫流的运动波方程中, 其上边界的位置也是动态的。结合 Zhang<sup>[9]</sup>, Govindaraj<sup>[10]</sup>等的研究成果将边界条件定义为:

$$\begin{cases} d(x, t) = 0, t > 0, x = L_0 \\ \frac{\partial d}{\partial x} = 0, t > 0, x = L \end{cases} \quad (6)$$

式中  $L_0$  为退水水面线顶端距坡顶的距离。

## 2.3 比水容和非饱和导水率的计算

2.3.1 比水容  $c(\theta)$  的计算 不考虑滞后效应时, 含水率和基质势为单值函数, 由

式中  $i$ —扫描次数;  $\theta_i, \varphi_i$ —分别表示第  $i$  次扫描时的含水率和基质势;  $\theta_{i-1}, \varphi_{i-1}$ —分别表示第  $i-1$  次扫描向第  $i$  次过渡时转换点的含水率和基质势,  $\varphi'_i$ —第  $i$  次扫描线中的最小基质势,  $\theta_d$ —主脱湿线上的含水率,  $\theta_w$ —主吸湿线上的含水率。

从理论上讲, 对式 (9) 求关于基质势的导数即得比水容, 但由于直接求解将会非常复杂, 因此采用差分法求解, 以差商近似代替微商, 即将式 (9) 简化为:

$$\theta_i = f(\varphi_i) \quad (12)$$

则  $c(\theta)$  的计算式为:

$$C = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\varphi_i} = \frac{f(\varphi_i + \Delta\varphi_i) - f(\varphi_i)}{\Delta\varphi_i} \quad (13)$$

在计算  $C$  值时, 必须先确定土壤水分的运动状态。判断土壤水分运动是否由主吸(脱)湿过程进入初级扫描状态的方法是每隔一定时段将本时段的模拟值与上一时段的模拟值进行比较决定, 如果含水率向相反的方向转化, 并且二者的差值超过规定的允许值时, 则认为水分运动已处于扫描状态。是否进入更高级的扫描状态, 方法同上, 同时记录转换点的含水率。

2.3.2 非饱和导水率的计算 根据 van Genuchten 推荐的经验公式 (7) 结合 Mualem<sup>[13]</sup> 导出的用来预测非饱和导水率的函数式

$$k(i) = k_s s_i^{1/2} [1 - (1 - s_i^{1/m})^m]^2 \quad (14)$$

可得到求非饱和导水率的公式

$$k(h) = k_s [1 + (\alpha h)^n]^{-2/m} \{1 - [1 - (1 + \alpha h)^n]^{-m}\}^2 \quad (15)$$

上两式中  $k(i)$ —Mualem 函数式中的相对非饱和导水率;  $k(h)$ —非饱和导水率;  $s_i$  为相对饱和度,  $s_i = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$ ;  $k_s$  为饱和导水率, 由实测资料获得, 其它符号意义同前。

## 2.4 有效糙率的确定

在坡地天然降雨漫流过程中, 有效糙率是运动波方程中的一个重要参数, 对模拟精度具有重要的影响。因此, 适当处理有效糙率是提高模拟精度的关键。本文将坡地漫流过程作为一个系统, 根据曼宁公式由降雨过程和漫流过程反推出一次降雨过程的有效糙率。

第一步, 将曼宁公式及流量公式移项交换得到:

$$n = \frac{1}{q} d^{5/3} B \sqrt{\sin\alpha} \quad (16)$$

式中  $B$  为坡面宽度。

第二步, 确定流量  $q$ 。即

$$q = (q_i + q_0) / 2 \quad (17)$$

式中  $q_i$ —产流后某一时段的实测平均流量,  $q_0$ —整个产流过程的平均流量。

第三步, 计算各时段的有效糙率  $n_i$ , 然后取平均值:

$$n_{\bar{}} = (n_1 + n_2 + \cdots + n_i) / i \quad (18)$$

## 2.5 上边界 OA 蒸发速率 $E(x, t)$ 的确定

土壤蒸发和植被蒸腾是坡地水量转化的重要组成部分, 也是研究工作中的难点。根据试验小区内土地利用方式和下垫面植被稀疏的特点, 把土壤蒸发和植被蒸腾作为一个

从表面水分散失的整体,将蒸散速率概化为:

$$E(x, t) = \begin{cases} E_p, & \theta < \theta_f, \text{ (第一阶段)} \\ \frac{\theta - \theta_c}{\theta_f - \theta_c} E_p + E_0, & \theta_c < \theta < \theta_f \text{ (第二阶段)} \\ E_0, & \theta < \theta_c \text{ (第三阶段)} \end{cases} \quad (19)$$

式中  $E(x, t)$ —蒸散速率;  $E_p$ —潜在蒸散速率,其值等于蒸发皿实测值乘以一个订正系数  $e$  (对于林草地,本文取 0.93);  $\theta_f$ —田间持水量,由实测获得;  $\theta_c$ —毛管断裂湿度,等于田间持水量的 70%;  $E_0$ —第三阶段的蒸散速率,由于  $E_0$  是一个极小的值,所以在计算过程中忽略不计。

### 3 模型的应用

为检验该模型在黄土地区的有效程度及其适用性,作者利用 1996~1997 年陕西长武王东沟小流域坡地径流小区(两个为 20m × 5m,坡度为 30 度和 32 度的刺槐林小区,另两个为 3m × 9m 坡度均为 36 度的紫穗槐小区和荒草地小区)天然降雨入渗产流的实测资料,分别对考虑滞后和不考虑滞后影响时的雨后蒸发条件下的土壤含水率以及降雨产流过程中的土壤水分动态、坡脚出流过程、坡面平均入渗速率进行了模拟。

#### 3.1 雨后蒸发条件下土壤含水率的精度检验

本文选取坡度为 30 度的刺槐林小区降雨入渗产流后蒸发条件下的土壤含水率实测资料,将模拟结果与实测值列于表 1,并对其绝对误差和相对误差进行分析,结果发现考虑滞后的模拟值比不考虑滞后的模拟值更加接近实测值,表明考虑滞后作用的模型具有更

表1 雨后蒸发条件下30度刺槐小区全坡面平均含水率模拟值与实测值比较

Table 1 Comparison of simulated and measured values of mean water content of the whole slope surface for locust plots with 30 degrees on the condition of evaporation after rainfall

降雨日期 Rainfall date (y/m/d)	土层深度 Depth of soil layer (cm)	含水率实测值 Observed water content (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	考虑滞后含水率 Moisture with hysteresis			不考虑滞后含水率 Moisture without hysteresis		
			模拟值 Simulated results (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	绝对误差 Absolute error (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	相对误差 Relative error (%)	模拟值 Simulated values (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	绝对误差 Absolute error (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	相对误差 Relative error (%)
1996/7/27	0~15	0.2597	0.2700	0.0143	5.51	0.2759	0.0162	6.23
	0~30	0.2394	0.2384	0.0010	0.42	0.2216	0.0178	7.44
	0~45	0.1871	0.1938	0.0067	3.58	0.1933	0.0068	3.63
	0~60	0.1903	0.1911	0.0008	0.24	0.1830	0.0073	3.84
	0~15	0.2637	0.2821	0.0184	6.98	0.2281	0.0356	13.52
1997/8/6	0~30	0.2610	0.2566	0.0044	1.69	0.2426	0.0211	8.07
	0~45	0.2410	0.2481	0.0071	2.95	0.2333	0.0077	3.18
	0~60	0.2159	0.2226	0.0067	3.10	0.2034	0.0125	5.79

高精度。

另外将 1996 年 7 月 27 日降雨入渗结束后考虑滞后与非滞后的 30 度刺槐小区距坡顶 5m 和距坡顶 20m 处的模拟值与实测值点绘成图 2, 图 2 显示了考虑滞后与非滞后不同坡面位置处土壤含水率的变化特征。由图 2 可以看出, 不考虑滞后作用的土壤水分下渗更深, 上部土层含水率更低, 整个湿润层的平均含水率也更低, 原因是在蒸发条件下, 考虑滞后作用时, 相同含水率下土壤吸力大者不易于蒸发, 从而滞后作用推迟了土壤水分的再分布, 降低了再分布过程的入渗速率。

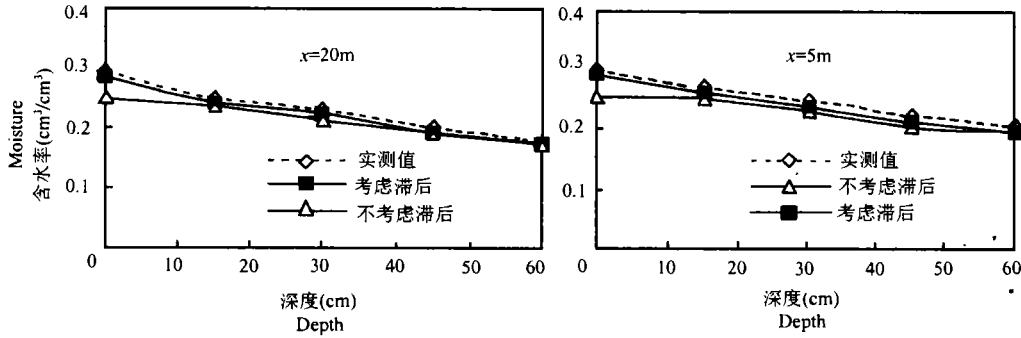


图2 1996年7月27日雨后蒸发条件下30度刺槐小区土壤含水率模拟值与实测值

Fig.2 Simulated and measured values of soil water content of locust plot with 30 degrees on the condition of evaporation after rainfall on July 27, 1996

### 3.2 坡面漫流的模拟结果检验

将 1997 年 8 月 6 日 30 度刺槐林小区和 1996 年 9 月 4 日 36 度荒草地小区的降雨产流过程的实测值与模拟值以及全坡面的平均入渗速率、坡面承雨过程绘成图 3。由图 3 可以看出, 坡面产流过程与实测径流过程甚相吻合, 表明该模型具有较高精度和较强的适应性。滞后作用下的人渗速率大于非滞后作用下的人渗速率, 这与前面分析的在降雨入渗条件下滞后作用加快土壤入渗速率这一结论相吻合。为进一步深入检验模型的可靠性, 又将 1996~1997 年四次降雨模拟的径流总量与实测径流总量列于表 2 进行比较。结果表

表2 降雨产流径流总量模拟值与实测值比较

Table 2 Comparison of simulated and measured values of total runoff amount during the process of rainfall-runoff

模拟日期 (y/m/d)	小区代号 Code of plots	总降雨量 (mm)	实测径流量 (mm)	考虑滞后径流量 (mm)			不考虑滞后径流量 (mm)		
				模拟值 values	绝对误差 error	相对误差 error(%)	模拟值 values	绝对误差 error	相对误差 error(%)
1996/7/27	A <sup>1)</sup>	22.64	2.70	2.8804	0.1804	6.68	3.1543	0.4543	16.83
1996/9/14	B <sup>2)</sup>	23.72	2.20	2.5880	0.3880	17.64	2.7652	0.5650	25.68
1996/9/17	B	22.53	5.00	5.8914	0.8910	17.82	6.3420	1.3420	26.84
1997/8/6	A	31.80	1.101	1.2010	0.0995	9.04	1.3580	0.2570	23.34

1) —30度刺槐小区; 2) —代表36度荒草地小区

明:考虑滞后的模拟精度在 80% 以上,滞后作用下的模拟径流总量更趋近实测值且小于非滞后作用下的模拟径流总量,这是滞后作用下的人渗速率大于非滞后作用下的人渗速率的结果,又一次说明模型考虑滞后作用比不考虑滞后作用的精度要高得多。

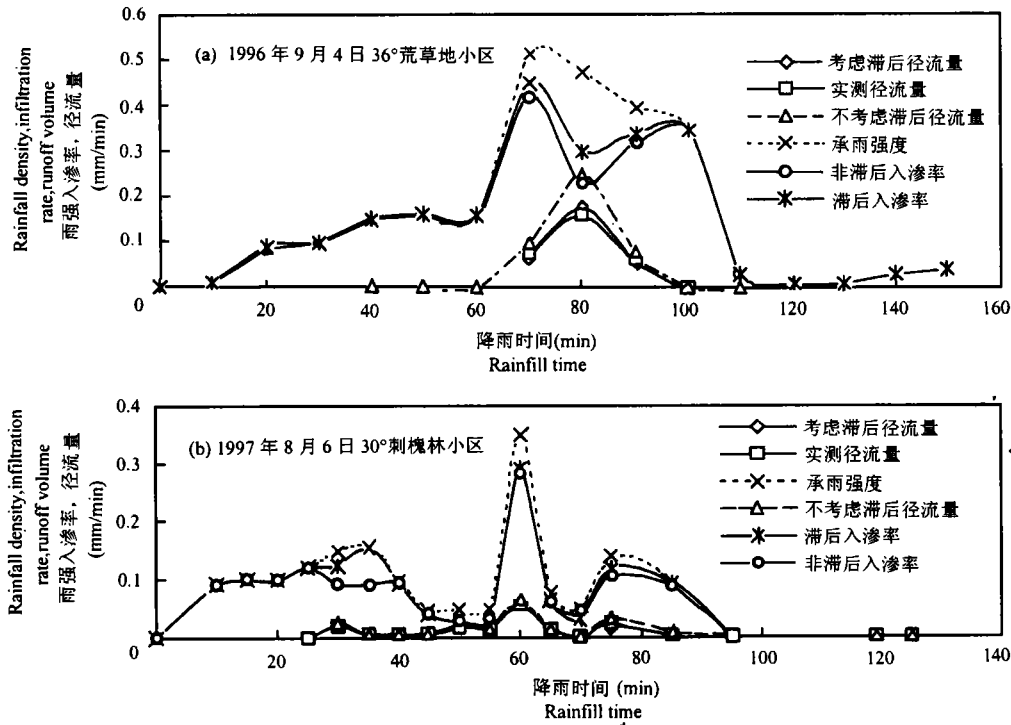


图3 不同小区承雨强度、径流过程、入渗速率的模拟值与实测值

Fig.3 Simulated and measured values of received rainfall intensity, process of runoff, infiltration rate in the different plots

## 4 结论

本文建立了考虑滞后作用的坡地水量转化数学模型,并给出了模型不同情况下的定解条件,对上述模型编写了计算程序,运用该程序对所有试验进行了模拟。通过对模拟值与实测值的比较,表明模型具有较高精度,特别是考虑滞后作用时模拟值更加接近实测值。入渗结束后,蒸发条件下考虑滞后作用的土壤含水率与实测值吻合较好,不考虑滞后的水分下渗更深,上部土层含水率更低,整个湿润层的平均含水率也更低。滞后作用降低了土壤水分再分布过程的人渗速率,推迟了土壤水分再分布过程。相反,在降雨入渗条件下,滞后作用加快了入渗速率,提高了土壤的人渗性能。因此,在进行降雨入渗产流时,建议考虑土壤水滞后效应的影响。

## 参 考 文 献

1. 沈冰, 王文焰. 植被影响下的黄土地坡降雨漫流数学模型. 水土保持学报, 1993, (1): 23~28
2. 沈冰, 王文焰, 沈晋. 短历时降雨对黄土地坡径流形成影响的实验研究. 水利学报, 1995, (3): 21~27

3. 王百田, 王斌端. 黄土坡面地表处理与产流过程研究. 水土保持学报, 1994, 8(2): 19~24
4. 余新晓, 朱金兆. 晋西黄土区人工降雨条件下坡面径流规律的实验研究. 见: 中国科学技术协会首届青年学术年会论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1992
5. 杨建英, 赵延宁, 孙保平等. 运动波理论及其在黄土坡面径流过程模拟中的应用. 北京林业大学学报, 1993, 15(1): 1~11
6. 王玉宽, 王占礼, 周佩华. 黄土高原坡面降雨产流过程的试验研究. 水土保持学报, 1991, 5(2): 25~31
7. Stone J J, Lane L J, Shirley E D. Infiltration and runoff simulation on a plane. Trans. ASAE, 1992, 35(1): 161~170
8. Tayfur G, Kavas M L, Govindaraju R S et al. Applicability of St. venant equations for two-dimensional overland flows over rough infiltrating surfaces. J. Hydr. Eng., 1993, 119(1): 51~63
9. Zhang W, Cundy T W. Modeling of two-dimensional overland flows. Water Resource Res., 1989, 25(9): 2019~2035
10. Govindaraju R S, Jones S E, Kavas M L. On the diffusion wave modeling for overland flow 1. Solution for steep slopes. Water Resource Res., 1989, 25(5): 734~744
11. Van Genuchten, M TH. A close-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, 44: 892~898
12. Mualem Y. A modified dependent domain model of hysteresis. Soil Sci., 1984, 137: 283~291
13. Mualem Y. Calculating the unsaturated hydraulic conductivity with a new closed-form analytical model. I. W. S. salinity laboratory. 1978, (9): 263~268

## A MODEL OF WATER EXCHANGE FOR HILLSLOPE WITH HYSTERESIS CONSIDERED

Liu Xian-zhao Kang Shao-zhong

*(Institute of Soil and Water Conservation, Chinese Academy of Sciences and  
Ministry of Water Resources, Yangling, Shaanxi Province 712100)*

### Summary

In this paper, a mathematical model of water exchange for hillslope, with which hysteresis was incorporated, was presented. The solution conditions of various boundary conditions were analyzed in this model. At the same time, the model was proved systematically by using the natural rainfall-infiltration-runoff data of hillslope of Wangdong gully small watershed, Changwu in Shaanxi. The simulated results showed that the model was of high precision, especially when the hysteresis was considered, the predicted results were approximated to measured results. Hysteresis results in decreasing in water content in the wetting front measured at the end of infiltration, slows down the redistribution. During the process of rainfall-infiltration-runoff, hysteresis has a great effect on water content, infiltration rate, flow process and flow volume.

**Key words** Hillslope, Water exchange, Mathematical model, Hysteresis