# 求土壤水力特征的一种迭代法*

徐绍辉　张佳宝
(中国科学院南京土壤研究所,南京　210008)

# AN ITERATIVE METHOD FOR SOLVING SOIL HYDRAULIC PROPERTY

Xu Shao-hui　　Zhang Jia-bao
(*Institute of soil science, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)

**关键词**　van Genuchten 模型,参数,最小二乘法,Picard 迭代
**中图分类号**　S152.72

土壤水力性质包括土壤水分特征曲线(它表明了土壤的基质势 $h$ 与土壤水分含量 $\theta$ 之间的关系) $\theta(h)$、非饱和水力传导率 $K$ 和扩散度 $D$。由于土壤的这三种水力性质可以通过关系式 $K = D\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}h$ 联系起来,因此,它们当中只有两个是独立的。不论是以水分含量为因变量还是以土水势为因变量的 Richards 方程,其中的参数如非饱和水力传导率、容水度或扩散度都是基质势或水分含量的函数。在研究实际问题时,通常需要知道土壤基质势与土壤水分含量之间的转换关系,以便在不同情况下,采用不同形式的 Richards 方程,所以,确定土壤的水分含量与基质势之间的定量关系有着非常重要的意义。

## 1　描述土壤水力性质的 van Genuchten—Mualem 模型

土壤水分含量是土壤水的基质势(或土壤水吸力)的函数,但描述它们之间确切关系的解析表达式是未知的,因此,实际应用中往往利用经验公式。在数值模拟计算和分析时比较常用的是 van Genuchten—Mualem 模型。

表征土壤水力特性的 van Genuchten—Mualem 模型[1]为:

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = [1 + |\alpha h|^n]^{-m} \tag{1}$$

---

* 本研究得到国家自然科学基金资助(批准号49671041)
收稿日期:1999-02-04;收到修改稿日期:1999-05-11

$$K(\theta)=K_s S^{\frac{1}{2}}\left[1-(1-S^{\frac{1}{m}})^m\right]^2 \tag{2}$$

式中 $S$——饱和度，$\theta$——水分含量（$L^3/L^3$），$\theta_r$——持留水分含量（$L^3/L^3$），$\theta_s$——饱和水分含量（$L^3/L^3$），$h$——基质势（L），$K(\theta)$——非饱和水力传导率（L/T），$K_s$——饱和水力传导率（L/T），$\alpha$、$n$、$m$——表示土壤水分特征曲线形状的参数，$m=1-1/n$，$0<m<1$。

## 2 方法的构造

由于式（1）和（2）中的 $\theta_r$，$\theta_s$ 可通过室内或野外试验测得，这样，式中只有 $\alpha$，$n$ 是待求的参数（$m$ 可利用关系式 $m=1-1/n$ 来得到）。为了求得参数 $\alpha$ 和 $n$，借助于最小二乘法，先对式（1）两端取对数

$$\ln S=-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln[1+\alpha^n(-h)^n] \tag{3}$$

再令

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\left\{\ln S_i+\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln[1+\alpha^n(-h_i)^n]\right\}^2 \tag{4}$$

式中，$h_i$ 是测定的土壤的基质势；$N$ 是测定的总次数；饱和度 $S_i$ 可由 $S_i=\dfrac{\theta_i-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}$ 计算出来，$\theta_i$ 是与 $h_i$ 对应的土壤水分含量。

分别使 $Q$ 对 $\alpha$、$n$ 求偏导数，并令

$\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}=0$，则

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^n}{1+\alpha^n(-h_i)^n}\ln S_i+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^n}{1+\alpha^n(-h_i)^n}\ln[1+\alpha^n(-h_i)^n]=0 \tag{5}$$

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial n}=0$，那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\ln[1+\alpha^n(-h_i)^n]\cdot\ln S_i+\frac{n-1}{n}\alpha^n\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^n\ln(-\alpha h_i)}{1+\alpha^n(-h_i)^n}\ln S_i\\&+\frac{n-1}{n^3}\sum_{i=1}^{N}\ln^2[1+\alpha^n(-h_i)^n]+\frac{(n-1)^2}{n^2}\alpha^n\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^n}{1+\alpha^n(-h_i)^n}\ln[1+\alpha^n(-h_i)^n]\\&\cdot\ln(-\alpha h_i)=0\end{aligned} \tag{6}$$

## 3 非线性方程组的解

式（5）和式（6）构成一个非线性方程组，它不能用常规的解线性方程组的方法来解决，下面我们用 picard 迭代来解这个非线性方程组[3]。

Picard 迭代的基本思想是：对利用最小二乘法形成的非线性代数方程组，把常数项及非线性项部分移到方程的右端，首先对解做一初始估计来计算非线性项，然后解线性代数方程组，把解得的结果代回到方程的右端，重复解线性代数方程组，当满足某一迭代准则时，迭代停止。此时，所求得的解即为所要求的结果。

式(5)和式(6)可分别变形为：

$$\alpha^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-h_i)^{n^{(k)}}}{1+(-h_i)^{n^{(k)}}(\alpha^n)^{(k)}} \ln S_i + \left(1-\frac{1}{n^{(k)}}\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^{n^{(k)}}}{1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}} \cdot \ln[1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}] + \alpha^{(k)} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} n^{(k+1)} = {} & \frac{1}{(n^{(k)})^2}\sum_{i=1}^{N}\ln[1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}]\cdot\ln S_i \\ & + \frac{n^{(k)}-1}{n^{(k)}}(\alpha^n)^{(k)}\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^{n^{(k)}}\ln(-\alpha^{(k)}h_i)}{1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}}\ln S_i \\ & + \frac{(n^{(k)}-1)^2}{(n^{(k)})}(\alpha^n)^{(k)}\sum_{i=1}^{N}\frac{(-h_i)^{n^{(k)}}}{1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}}\cdot\ln[1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}] \\ & \cdot\ln(-\alpha^{(k)}h_i) + \frac{n^{(k)}-1}{(n^{(k)})^3}\sum_{i=1}^{N}\ln^2[1+(\alpha^n)^{(k)}(-h_i)^{n^{(k)}}] + n^{(k)} \end{aligned} \tag{8}$$

式(7)和式(8)即是用 Picards 迭代求解由式(5)和式(6)组成的非线性方程组的表达形式。

式(7)和式(8)中的指标$(k)$和$(k+1)$分别表示所要求的$\alpha$和$n$值的第$k$次和第$k+1$次迭代值。

具体计算时，先给$\alpha$和$n$一初始值$\alpha^{(0)}$和$n^{(0)}$，把它们代入式(7)和(8)的右端，算出$\alpha$和$n$的第一次迭代值$\alpha^{(1)}$和$n^{(1)}$；再把$\alpha^{(1)}$和$n^{(1)}$代入式(7)和式(8)的右端，得出$\alpha$和$n$的第二次迭代值$\alpha^{(2)}$和$n^{(2)}$，……，依次下去，直到$\alpha$和$n$的第$k+1$次和第$k$次迭代值之差小于预先给定的常数$\varepsilon$($\varepsilon$为一给定的充分小的正常数)，即$|\alpha^{(k+1)}-\alpha^{(k)}|<\varepsilon$和$|n^{(k+1)}-n^{(k)}|<\varepsilon$，此时得到的$\alpha^{(k+1)}$和$n^{(k+1)}$就是所要求的$\alpha$和$n$的值。

这样，我们也就解决了 van Genuchten–Mualem 模式的求参问题。

# 4　数值试验

为了验证文中所提方法的有效性，现利用文献[2]给出的砂质粘壤土的数据资料：饱和水分含量$\theta_s=0.54$，剩余水分含量$\theta_r=0.12$，其他的水分含量$\theta_i$和基质势$h_i(i=1,2,\cdots,N)$的实测值(由文献[2]中图上查出)；正常数$\varepsilon$取为 0.0005。

通过计算可知，用 van Genuchten 模型描述的该砂质粘壤土的水分特征曲线的参数$\alpha=0.79$，$n=1.63$。同时，$m=1-1/n=0.39$。

把实测值得出的和由 van Genuchten 模型计算出的水分特征曲线绘于图 1 中。

从图 1 可以看出，实测的水分特征曲线与根据 van Genuchten 模型算出的水分特征曲线比较接近。图 1 中的数据点数是 11 个，根据计算值得出的相关系数为 0.976。

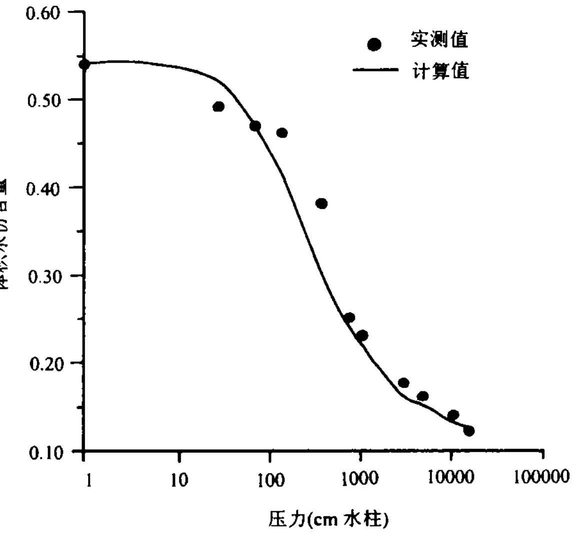


图1 实测值与计算值的对比曲线

由于 van Genuchten 模型是一个比较复杂的函数，难以简单地求出其中的参数。但通过一系列的观测资料，借助于最小二乘法，将得到一个以模型中的参数为变量的代数方程组。因该代数方程组是非线性的，我们可以利用 Picard 迭代法求解它。数值例子表明，用文中所提出的方法来获得 van Genuchten 模型中的参数是可行的。

## 参 考 文 献

1. van Genuchten M Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, 44:892～898
2. Shao Mingan Horton R. Integral method for estimating soil hydraulic properties. Soil Sci. Soc. Am. J., 1998, 62:585～592
3. 徐绍辉，朱学愚，朱国荣．二维潜水流动问题的分裂解法．应用数学和力学，1996，(11)：989～995