DOI：10.11766/trxb201605170103

作物肥料效应函数模型研究进展与展望*

章明清　李　娟　孔庆波　严　芳
（福建省农业科学院土壤肥料研究所，福州　350013）

摘　要　在过去四十年里，肥料效应函数模型研究和应用取得重要进展，业已成为我国测土配方施肥的主要技术依据和一个分支体系，其中二次多项式是研究和应用最多的肥效模型。本文对经验肥效模型的类型及其适用性、试验设计、参数估计、类特征肥效模型、非典型式推荐施肥优化方法以及函数法与土测值的结合等方面的研究进展进行了简要综述。在此基础上，分析了问题产生原因和主要诊断方法。为此，建议：未来要深入探讨消除或缓解多元肥效模型多重共线性和异方差危害的补救措施及其有效应用条件；研发非结构肥效模型，克服经验肥效模型专业假设的不合理性；在大量“3414”试验资料基础上开展作物肥效参数识别技术研究，为肥效模型实现微观指导和推荐施肥软件系统研发提供理论模型依据。

关键词　肥效模型；共线性；异方差；非结构模型；肥效参数；参数识别
中图分类号　S147. 21　　**文献标识码**　A

作物肥效模型可分为结构模型（机理模型）和经验模型两类[1]：结构模型是根据作物养分吸收机理和营养过程而建立的数学模型，用于估算作物对养分的需求量，这种模型的优点是考虑了植物营养过程，缺点是模型复杂，所需参数多，实际应用尚有困难；经验模型则不考虑作物营养机理及其逻辑关系，是根据肥料田间试验结果、建立在生物统计基础上的回归模型，根据模型计算出代表性地块的推荐施肥量以及肥料间的交互效应等施肥参数，具有直观、简便易行和利于宏观调控等优点。鉴于经验肥效模型是直接“问询”于农作物而得，其计量准确性和真实性非其他方法所能比拟[2]，是当前国内外实现计量施肥的主要技术方法[1, 3-6]。

但在施肥实践中，经验肥效模型存在大量非典型式[7-9]，至今未能较好地解决，严重制约了该法的计量精确性和应用价值。可惜的是，近十多年来发表的众多作物肥效模型研究文献大都属于应用研究范畴[10-15]，针对肥效模型本身的基础和应用基础研究文献鲜见公开发表。我国2005—2015年十年来在测土配方施肥工作中，开展了大量的氮磷钾田间肥效试验，所得试验数据之多和范围之广是罕见的。目前，如何正确利用这些试验结果来指导作物合理施肥是一个大问题。本文在归纳总结作物肥效模型过去四十年来主要研究进展的基础上，探讨经验肥效模型本身存在的科学问题及其改进的若干建议，以期为正确建立施肥模型的相关研究提供参考。

1　经验肥效模型的研究进展

1.1　经验肥效模型常见类型及其适用性

在不同生产条件下，作物施肥的增产效应有不同表现，因而反映施肥量与作物产量数量关系的肥效函数类型也不同。迄今为止，提出的经验模型已有十余种[16-20]，常见的单个肥效方程汇总于表1。其中的一元线性肥效模型、米氏肥效方程和

* 国家自然科学基金项目（31572203）和福建省公益科研专项（2014R1022-5）资助 Supported by the National Natural Science Foundation of China（No. 31572203）and the Special Public Welfare Scientific Research of Fujian Province（No. 2014R1022-5）
作者简介：章明清（1963—），男，博士，研究员，长期从事作物施肥原理与技术研究。E-mail：Zhangmq2001@163.com
收稿日期：2016-05-17；收到修改稿日期：2016-07-25；优先数字出版日期（www.cnki.net）：2016-08-29

表1 常见单个方程的肥料效应函数类型[1, 17]

Table 1 Common single factor-based fertilizer effect function model[1, 17]

模型类型 Model types	函数类型 Function types	典型效应方程 Typical effect equation	数学形式 Mathematical version
一元肥效模型 One-factor model	线性函数 Linear function	线性方程Linear equation	$\hat{Y}=b_0+b_1X$
	多项式函数 Polynomial function	二次多项式 Quadratic polynomial	$\hat{Y}=b_0+b_1X+b_2X^2$
		三次多项式 Cubic polynomial	$\hat{Y}=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3$
	指数函数 Exponential function	米氏方程 Michaelis-Menten equation	$\hat{Y}=A(1-\exp(-cX))$
		斯皮尔曼方程 Spearman equation	$\hat{Y}=A(1-R^X)$
	平台函数[18] Platform function	线性+平台函数 Linear + platform function	$\hat{Y}=b_0+b_1X,\ (X<c),\ Y=P,\ (X\geqslant c)$
		二次+平台函数 Quadratic+platform function	$\hat{Y}=b_0+b_1X+b_2X^2,\ (X<c),\ Y=P,\ (X\geqslant c)$
	逆多项式函数 Inverse polynomial function	逆线性多项式 Linear inverse polynomial	$\hat{Y}=\frac{b_0+b_1X+b_2X^2}{1+b_3X}$
		逆二次多项式 Quadratic inverse polynomial	$\hat{Y}=\frac{b_0+b_1X}{1+b_2X+b_3X^2}$
二元或三元肥效模型 Binary or multivariate fertilizer response model	多项式函数 Polynomial function	二次多项式 Quadratic polynomial	$\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_1^2+b_4X_2^2+b_5X_1X_2$ $\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+b_4X_1^2+b_5X_2^2+b_6X_3^2+b_7X_1X_2+b_8X_1X_3+b_9X_2X_3$
		0.5次多项式 Square root polynomial	$\hat{Y}=b_0+b_1X_1^{0.5}+b_2X_2^{0.5}+b_3X_1+b_4X_2+b_5X_1^{0.5}X_2^{0.5}$
	对数函数[18-20] Log function	对数转换式 Logarithmic transformation	$\ln\hat{Y}=b_0+b_1\ln X_2+b_3(\ln X_1)^2+b_4\ln(X_1)\ln(X_2)$
	逆多项式函数[17] Inverse polynomial function	减产逆多项式 Inverse polynomial of reduction yield	$\frac{1}{\hat{Y}}=\frac{1}{1-N/a}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B_N N}+\frac{1}{B_P P}+\frac{1}{B_K K}\right)$

注：模型中的Y表示产量，X表示施肥量，X_1、X_2、X_3或N、P、K分别表示N、P_2O_5、K_2O施肥量，其他符号为模型系数 Note：Y in models was output，and X was application rate of fertilizer. X_1，X_2，X_3 or N，P，K are application rate of N，P_2O_5 and K_2O fertilizer respectively. Other symbols were model's parameters

斯皮尔曼方程不能反映过量施肥的减产效应，适用于土壤肥力较低和施肥量不大的肥料效应模式，而多项式模型和逆多项式模型则可反映过量施肥的减产效应。平台函数和对数转换函数的一个共同特点是它们在到达最高产量以后有一段平缓或水平效应曲线或曲面。为进一步扩大经验模型的适用范围，有些研究者还将土壤测试值、气候因子等地点变量作为自变量直接引入肥料效应函数，建立了包含施肥量和地点变量的综合模型[21-23]。

为探讨不同肥效模型的适用性，毛达如和张承东[23]对2次、1.5次、0.75次和0.5次的氮磷多项式肥效模型进行比较研究，表明在灌溉地上二次多项式能较好地反映小麦的肥效规律。Cerrato和Blackmer[18]以及杨靖一等[24]、陈新平等[25]对蔬菜、冬小麦和夏玉米的多项式、线性或二次函数+平台等氮肥效应模型进行了比较研究，表明线性

或二次型+平台模型的推荐施氮量大大低于二次型模型，但二次型模型的通用性较强。针对米氏方程不能反映过量施肥的减产效应，Middleton[26]和从容[27]提出了改进建议，但改进的模型是否较一元二次多项式更具有优越性则未见更多相关报道。侯彦林[28]提出的生态平衡施肥模型，提出了一种有别于现有肥效模型的建模思路。

对不同生产条件和作物肥效模型的适宜模式进行了许多研究，一般认为，二次多项式肥效方程能较好地反映作物产量和施肥量之间的数量关系，模型计算和参数估计简便易行，是研究和应用最多的模型种类[13-14, 23]，其他肥效模型类型至今仍缺少广泛区域和作物的适用性检验。令人遗憾的是，在施肥实践中，二次多项式肥效模型存在大量非典型式。研究表明，一元模型典型式仅占约60%，二元模型典型式则占40.2%[7-8]，三元模型典型式更低至23.6%[9]。任何田间试验都可能存在失误从而导致失败，但是，在不同肥料之间、肥料与其他产量限制因子之间存在着复杂的联应关系，没有理由认为其余的过半数试验均是失误。

为了提高经验肥效模型的适用性和典型肥效模型出现几率，国内外学者除就模型的选择和改进进行了许多探讨外，对肥效试验设计、参数估计、推荐施肥等建模环节也进行了大量的研究。

1.2　肥效试验设计及其改进

要建立可靠的肥效模型必须以正确的试验设计为基础。20世纪80年代以来，以建立肥效模型为目的的多元肥料试验设计在我国得到普及推广。由于多因素肥效试验设计完全方案的处理数量过多，难以被广泛接受，部分实施方案便取代了完全方案。目前，应用广泛的试验设计方法[2]主要有二因素3×3设计、二因素重复D-饱和设计、三因素正交设计、三因素回归最优设计和三因素通用旋转设计等。

原则上，多因素部分实施方案应能包含完全实施方案的所有处理产量的可能空间。但是，随着研究的深入和累积资料的增多，人们发现有些多元肥效模型虽然有很好的统计显著性，但模型的预测预报性能不良，使回归模型丧失了实用价值。主要原因是这种部分实施方案的因子组合仅考虑到数学上最优，导致处理组合大部分分布在因子空间的表面，而施肥技术领域最为关心的中等至中上等施肥量区间即因子空间的中间部分却极少或无试验处理组合，或者，有的试验设计方案的信息矩阵行列式值接近于零，使最小二乘法估计变劣。Wu等[29]及吴平和陶勤南[30]首先发现这一问题，对三因素D-饱和最优设计在处理组合选择上适当放弃了统计学上的优良性，使10个处理中有6个处理组合分布在因子空间内部，较好地满足了农化研究的要求，取得了明显的改善效果。

近十年来，在总结多因素肥效试验设计研究结果基础上，农业部在国家测土配方施肥工作中提出了氮磷钾“3414”试验设计方案[31-32]。该试验方案不仅具有回归最优设计处理少、效率高的优点，而且试验处理组合符合肥料试验和施肥决策的专业要求：既可以用于建立三元肥效模型，又可以用于建立三个二元肥效模型和三个一元肥效模型，提高了试验效率；另一个优点是编码值有直观可比性，便于田间示范。因此，“3414”设计方案是当前一种优秀的肥效试验设计方案。

1.3　肥效模型参数估计方法及其改进

参数估计是建立肥效模型的重要技术环节，当前主要采用普通最小二乘法。但著名的米氏肥效方程等指数曲线模型最早是采用“三元法”[19]，此法不能使参数估计达到优化水平，后来人们将指数方程转化为多项式方程[16]，采用普通最小二乘法求解方程参数，参数估计虽然能达到优化水平，但是普通最小二乘法对数据分布趋势有严格要求，用于拟合田间试验数据常出现病态方程。为此，进一步提出了米氏肥效方程灰色建模法[33]，较好克服了上述两种方法的局限性。

针对多元肥效模型存在大量非典型式的事实，为提高典型肥效模型的出现几率，章明清等[34]提出了蒙特卡洛（Monte Carlo）建模法，其基本思路是利用肥效模型系数的先验信息，分别设定各系数的取值范围，并在此范围内用众多随机数代入方程得到随机解，然后从众多随机解中选择专业最优的模型结果。因此，这种方法需要计算足够多的随机解才能得到稳定且准确的结果，是以时间换取精度的计算方法。在粮油作物的67个二元和59个三元二次多项式肥效模型中，典型式出现几率分别为56.7%和37.3%，是最小二乘法的2.5倍和2.2倍。与最小二乘法相比，蒙特卡洛法是在参数寻优时牺牲数学上偏差平方和最小的优良性，使待估参数达到专业上最优而数学上较优，从而提高典型肥效模型的出现机率。

1.4 类特征肥效模型（区域施肥模型）的研究进展

如何对多点肥料试验资料进行归纳总结，正确建立区域施肥模型，使之成为施肥决策的依据，历来是人们关注的重要课题。迄今，不少学者提出了许多分类或聚类方法，诸如在20世纪80年代前后，Colwell[35]提出了回归系数平均法，王兴仁等[36]提出分类回归综合法，毛达如和张承东[37]提出动态聚类法，杨守春和陈伦寿[38]提出按照无肥区产量水平划分归类等，吴良欢和陶勤南[39]对水稻肥料效应的分类方法及其类内距离阈值的确定进行了探讨。王兴仁等[36]以及毛达如和张承东[37]还详细阐述了多点肥效试验资料进行分类或聚类的理论基础和方法。纵观现有肥料效应分类或聚类方法，均是从多点肥料试验结果中找出具有一定代表性的类肥料效应函数，作为推荐施肥的依据。但是，有关肥效分类结果在类与类之间是否具有统计显著性差异，在以往的研究中未引起足够的重视。此外，不同聚类分析方法对作物肥效分类结果的影响及其有效性也鲜见研究报道。

1.5 非典型肥效模型建议施肥量的优化方法

肥效模型典型性判别也是建模的重要环节，涉及到肥料效应定量评价和推荐施肥量的可靠性问题，但至今未引起足够的重视。通常用于求推荐施肥量的边际产量导数法仅适用于典型肥效模型，不能用于大量存在的非典型肥效模型。在这一方面，王兴仁[7-8]曾对全国179个不同类型的二元多项式肥效模型的施肥意义和数学判别方法进行详细的讨论。章明清等[9]根据89个水稻三要素肥效模型的研究结果，认为三元肥效模型典型性与模型极值存在与否和极值性质密切相关，据此可将三元肥效模型分为典型式和三种不同类型的非典型式，提出了不同类型三元肥效模型的简捷数学判别方法。但限于当时的条件，这些研究提出的施肥建议属于半定量性质，未达到统计优化水平。

事实上，肥效模型来自田间试验结果，必然反映了试验地土壤的真实情况，即使是非典型式也隐含着许多有用信息。吴平和陶勤南[30]在研究三元肥效模型时提出用产量频率分析法来确定最佳施肥量，使定量技术达到优化水平。章明清等[34]针对“3414”设计的试验资料发现，对非典型肥效模型采用产量频率分析法计算推荐施肥量，因组合数太少导致推荐用量明显偏高或偏低。但在相同目标产量下，改用蒙特卡洛法推荐施肥，推荐用量相当于相同试验地的典型肥效模型的推荐用量，结果明显优于产量频率分析法。

1.6 肥料效应函数结合土壤测定的研究进展

为了使肥料效应函数法具有宏观调控和微观指导的双重功能，我国土肥科技工作者经过多年努力，于1990年前后形成了“先效应后测土”的技术路线[2]，即在田间试验前采集基础土样测定速效养分含量等指标，用田间试验结果建立肥效模型；然后，根据肥效模型求出的最佳施肥量和产量信息与有关土测值之间建立回归关系式，从而达到用土测值来估算施肥量等参数的目的，用于施肥实践。杨守春和陈伦寿[38]巧妙地将作物产量视为基础产量和施肥效应两部分组成，而基础产量被认为可能与土壤氮、磷养分含量有关，从而建立包含土壤养分测试值和施肥量等因子变量的作物施肥模型，其相对误差不超过10%，可用于指导施肥。

综上所述，在过去四十年里，肥料效应函数模型的研究和应用取得重要进展，业已成为我国测土配方施肥技术的主要依据和一个分支体系，其中研究和应用最多的是二次多项式肥效模型。但是，近年的研究表明，当前“3414”设计的肥效试验资料既使采用蒙特卡洛建模法，二元和三元模型的典型式比率也仅有56.7%和37.3%[34]。这种成败几乎各半的建模结果，不能不令人深思经验肥效模型的科学性。

2 经验肥效模型的局限性

经验肥效模型是建立在经典正态线性回归模型理论基础上的，要正确使用回归模型就必须遵守回归分析理论的基本假设。这些假设主要包括[40]：（1）回归模型是参数的线性函数；（2）自变量$\boldsymbol{X}$独立于误差项；（3）给定$\boldsymbol{X}$，方程误差项是均值为零、方差为常数的正态分布，误差项不存在自相关；（4）观测次数必须大于参数个数，$\boldsymbol{X}$变量要有足够的变异；（5）模型无设定偏误，自变量间不存在准确的线性关系。因为国内相关教科书大都未明确列出这些假设条件，其理论和应用价值至今未能引起同行们的重视。本文侧重于分析和讨论与肥效模型关系最密切的多重共线性、异方差以及模型专业假设不合理性等三个问题，以期引起相关研究者的思考。

2.1　经验肥效模型的多重共线性问题

经典回归分析理论假设回归模型的因变量X_i之间不存在准确的线性关系，即各个自变量之间无多重共线性（multicollionearity）[40-41]。但在具体应用中，受制于数据采集范围、试验设计和模型设定等因素制约，多元回归模型的因变量之间总会存在一定程度的线性相关。产生多重共线性的另一个原因是回归模型中所包含的自变量可能具有相同的变化趋势。强烈的多重共线性会给普通最小二乘法参数估计、检验与预测等方面带来严重的不良后果[40-42]。在数理统计学中，多重共线性诊断有以下几种方法[43]：（1）多重共线性的典型特征是回归模型具有高的R^2值，但模型参数 t 检验却鲜见达到显著水平；（2）自变量之间具有高度的相关性。此外，检查偏相关系数、辅助回归、试验设计矩阵特征值及病态指数、方差膨胀因子等方法[40, 44]也是常用方法。作为一个经验法则，如果一个变量的方差膨胀因子超过5～10，就认为自变量间存在高度共线性[43]。

当前常用的经验肥效模型是否存在多重共线性呢？以福建630个水稻（早稻171个，晚稻170个，中稻289个）“3414”试验设计资料为例，分别计算三元二次多项式肥效模型和三元平方根多项式肥效模型的自变量之间简单相关系数和方差膨胀因子（表2和表3）。初步分析表明，肥效模型中自变量间简单相关系数及各自变量的方差膨胀因子与“3414”试验设计的施肥量无关，但与肥效模型设定有关。在三元二次多项式模型中，X_1与X_1^2、X_2与X_2^2、X_3与X_3^2之间的相关系数高达0.942 9，X_1与X_1X_2或X_1X_3之间、X_2与X_1X_2或X_2X_3之间、X_3与X_1X_3或X_2X_3之间的相关系数也达到0.738 8，X_1^2与X_1X_2或X_1X_3之间、X_2^2与X_1X_2或X_2X_3之间、X_3^2与X_1X_3或X_2X_3之间的相关系数也达到0.732 2；各自变量的方差膨胀因子均大于10，平均达到31.895。相关系数和方差膨胀因子均表明，二次多项式肥效模型自变量间达到强烈共线性水平。用相同方法检验三元平方根多项式肥效模型，结果显示，自变量间的简单相关系数和方差膨胀因子均明显大于二次多项式肥效模型，其中方差膨胀因子平均高达163.72，是二次多项式的5倍，表明平方根多项式的多重共线性程度更为严重。由相关系数和方差膨胀因子的计算原理可知，表1中类似多项式数学形式的肥效模型也会存在多重共线性问题。

当多元肥效模型中的两个自变量之间具有高

表2　水稻氮磷钾“3414”肥效试验的三元二次多项式模型自变量的简单相关系数和方差膨胀因子

Table 2　Simple correlation coefficient of independent variables and its variance inflation factor（VIF）in ternary quadratic polynomial model for the field experiment designed in“3414”matrix on paddy rice response to N，P and K fertilization in Fujian province

自变量 Independent variable	自变量Independent variable									方差膨胀因子 VIF
	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	
X_1	1									38.12
X_2	0.257 6	1								38.12
X_3	0.257 6	0.257 6	1							38.12
X_1^2	0.942 9	0.222 2	0.222 2	1						11.87
X_2^2	0.222 2	0.942 9	0.222 2	0.199 6	1					11.87
X_3^2	0.222 2	0.222 2	0.942 9	0.199 6	0.199 6	1				11.87
X_1X_2	0.738 8	0.738 8	0.169 1	0.732 2	0.732 2	0.183 6	1			45.69
X_1X_3	0.738 8	0.169 1	0.738 8	0.732 2	0.183 6	0.732 2	0.547 2	1		45.69
X_2X_3	0.169 1	0.738 8	0.738 8	0.183 6	0.732 2	0.732 2	0.547 2	0.547 2	1	45.69

注：X_1、X_2、X_3分别表示N、P_2O_5和K_2O施肥量。下同 Note：X_1，X_2，X_3 were application rate of N，P_2O_5 and K_2O fertilizer respectively. The same below

表3 水稻氮磷钾“3414”肥效试验的三元平方根多项式模型自变量的简单相关系数和方差膨胀因子

Table 3 Simple correlation coefficient of independent variables and its VIF in ternary square root polynomial model for the field experiment designed in “3414” matrix on paddy rice response to N, P and K fertilization in Fujian province

自变量 Independent variable	自变量Independent variable									方差膨胀因子 VIF
	$X_1^{0.5}$	$X_2^{0.5}$	$X_3^{0.5}$	X_1	X_2	X_3	$X_1^{0.5}X_2^{0.5}$	$X_1^{0.5}X_3^{0.5}$	$X_2^{0.5}X_3^{0.5}$	
$X_1^{0.5}$	1									393.85
$X_2^{0.5}$	0.322 9	1								34.61
$X_3^{0.5}$	0.322 9	0.322 9	1							280.44
X_1	0.961 4	0.280 1	0.280 1	1						166.69
X_2	0.280 1	0.961 4	0.280 1	0.257 6	1					15.31
X_3	0.280 1	0.280 1	0.961 4	0.257 6	0.257 6	1				20.96
$X_1^{0.5}X_2^{0.5}$	0.750 2	0.750 2	0.177 6	0.732 8	0.732 8	0.162 5	1			285.07
$X_1^{0.5}X_3^{0.5}$	0.750 2	0.177 6	0.750 2	0.732 8	0.162 5	0.732 8	0.512 9	1		41.69
$X_2^{0.5}X_3^{0.5}$	0.177 6	0.750 2	0.750 2	0.162 5	0.732 8	0.732 8	0.512 9	0.512 9	1	234.87

度线性相关时，它们中的一个变量可以被另一个变量完全或近似地表示。此时，这两个变量的相应系数值就只能反映它们对因变量的共同影响，不能反映它们与因变量之间的结构关系。可能导致的后果是：（1）肥效模型系数估计值对作物产量的细小波动非常敏感，难以精确估计；（2）回归系数的符号有误，诸如系数应该是负的，结果恰恰是正的；（3）难以衡量各个回归变量对作物产量的贡献，因为两个回归变量存在高度共线性时，当其中一个变量发生变化时，另一个变量也自动随之发生变化。作物肥效模型的一个科学价值是能够根据模型系数大小，定量分析和比较养分间对作物产量影响的数量关系，以及不同区域的作物养分效应的数量关系，或同一区域不同作物的养分效应的数量关系，等等。但是，由于多项式肥效模型存在严重的多重共线性问题，导致它们的系数值大小失去了应有的肥效含义，甚至出现反常现象，使结果难以解释。

可见，多项式肥效模型存在严重的多重共线性，而且主要是由模型设定本身造成的，与试验设计方案关系不大，这是当前多元肥效模型出现大量非典型式而一直未能得到解决的重要原因之一。

2.2 经验肥效模型的异方差问题

经典线性回归分析针对模型随机误差项$\hat{u}$的一个重要假设是$\hat{u}$在不同观测点具有同方差性，即误差项$\hat{u}$的方差是一个等于σ^2的常数[43]。这意味着$\hat{u}$具有相同的分散程度，等同于给定X_i条件下的Y_i的条件方差。但是，这种等方差假设在实际问题中往往难以得到满足。产生异方差的主要原因有[40]：（1）随着数据采集技术改进，σ^2可能会减少；（2）异常观测值导致出现异方差；（3）回归模型设定不正确。一个经验法则[40]告诉我们，当最大方差较最小方差的10倍还大时，我们就遇到了严重异方差问题，此时普通最小二乘法就丧失了实用价值[40, 45]。异方差诊断的最简单和有效的方法是模型残差分析。当回归模型满足相关假设条件时，残差图上n个点的散布是随机的，无任何规律。如果存在异方差，残差图上点的分布就会呈现出一定的变化趋势，如残差值增大或减小等。异方差的定量诊断方法主要有等级相关系数检验、帕克检验和怀特检验等[40]。

作物肥效模型是否存在异方差呢？同样以福建630个水稻“3414”试验资料为例探讨这个问题。根据空白区产量变化幅度，将早稻、晚稻和中稻稻田肥力水平划分为“高”、“中”和“低”三个等级[10, 46-47]。在此基础上，分别建立各稻作3个肥力等级的氮磷钾肥效方程及其推荐施肥量，这是多点试验资料归纳汇总的一种常用方法。按照经典回归分析假设，各肥力等级的肥效模型在其14个处理中应该具有相同的方差。然而，事实果真如此吗？首先，针对各稻作每个肥力等级内的14个试验处理，分别计算各处理的模型产量拟合残差；然后，

以各处理的试验产量为X轴，以拟合残差为Y轴，绘制图1的残差散点图。9个肥效模型的残差图一致表明，随着产量水平提高，其拟合残差呈现逐渐散开的漏斗状分布趋势，显示不同产量水平下残差的方差不相等，总体上误差方差是随着产量水平的提高而增加。严重异方差将导致肥效模型：（1）最小二乘法参数估计不再具有最小方差的优良性，即不再是有效的，对大样本也是如此，这是一个不可原谅的严重问题；（2）参数估计值的方差是有偏差的，且无法辨别是正的还是负的偏差，导致肥效模型的 t 统计量和 F 统计量不再可靠。

事实上，这种状况很容易理解。试验条件下均是排除了研究因素外的其他限制因子，在土壤养分肥力较低时，作物产量处于低产水平，此时通过施肥可迅速提高产量，而因施肥造成减产或平产的可能空间很小，即产量方差较小；但在高产阶段，通过施肥可能继续增产，也可能不再增产，甚至可能因过量施肥造成减产，即产量变化的可能空间较大，此时方差必然较大。因此，依据不同施肥量和产量建立的经验肥效模型必然带有异方差性质。

2.3　经验肥效模型的专业假设不合理性问题

经典回归分析理论的一个重要假设是模型无设定偏误。但对二次多项式肥效回归模型的理论分析表明，其微分式均为线性模型：

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\boldsymbol{X}=a+\boldsymbol{b}\boldsymbol{X} \qquad (1)$$

式中，Y表示产量，$\boldsymbol{X}$表示施肥量，a、$\boldsymbol{b}$为模型系数，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{X}$为向量。随着施肥量增加，单位养分的增产量呈现直线下降。但是，根据笔者目前掌握的若干个6水平、7水平和8水平的单元肥效试验资料，发现X与$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\boldsymbol{X}$之间并没有明确的线性关系。图2的8水平中稻氮肥肥效试验结果清楚表明，氮肥增产率$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\boldsymbol{X}$随着施氮量增加是按照指数规律下降的，而不是直线下降。随着施氮量增加，起初氮肥的增产效率迅速降低，若继续增施氮肥，则其增产率下降程度逐渐减缓。

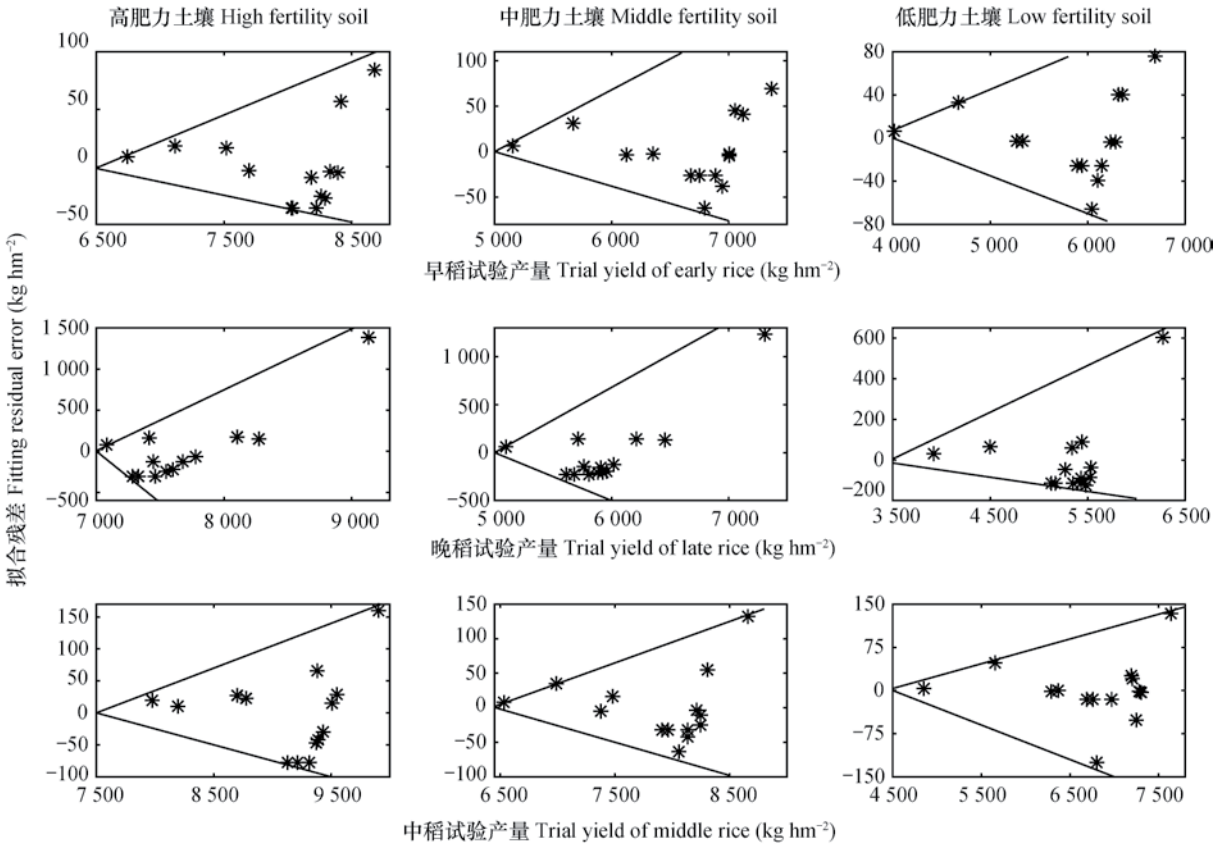

图1　稻谷产量对肥效模型拟合残差的影响

Fig. 1　Effect of rice yield on fitting residual of the fertilizer efficiency model

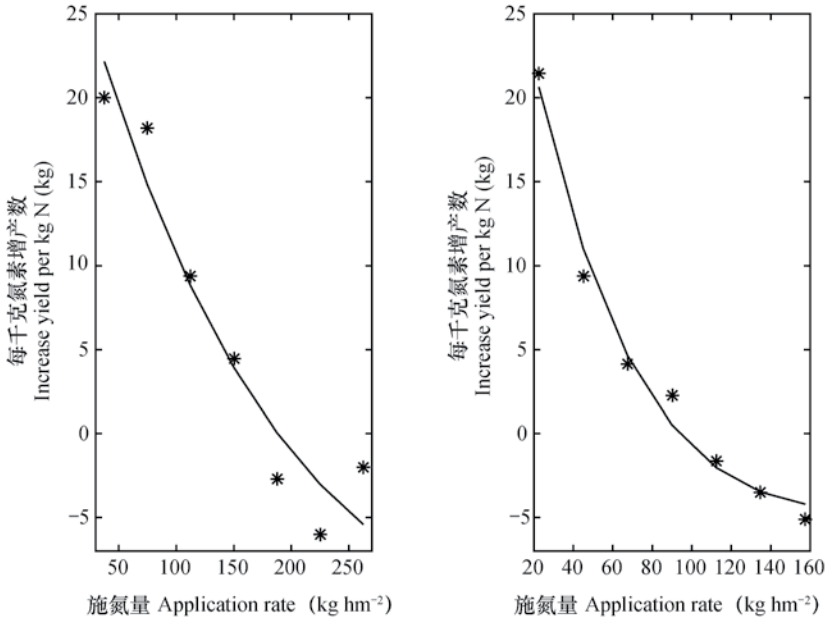

图2 中稻施氮量（X）对单位重量养分增产率dY/dX的影响

Fig. 2 Effect of N application rate（X）on dY/dX（rice yield increasing rate per unit weight of nutrient）

另一方面，常用的二次多项式肥效模型降为一元模型时，经过数学变换均可转换成如下形式：

$$Y=a+(b+cX)^2 \qquad (2)$$

式中，a、b、c为模型系数，X为施肥量，Y为作物产量。分析表明，它们均是关于最高施肥量的对称函数，即：在最高施肥量之前施肥的增产效应与最高施肥量之后施肥的减产效应是相同的。实践证明，这种假设与大多数田间实际情况并不相符。田间条件下在施肥量低于最高施肥量时，施肥的增产效应通常较高，尤其是低肥力田块更是如此；在施肥量高于最高施肥量时，由于土壤缓冲作用和作物奢侈吸收等原因，过量施肥的减产效应通常较为缓慢，高产耐肥新品种的推广应用使这种现象更为普遍。但是，目前广泛采用的二次多项式肥效模型却不能反映这一事实。

因此，常用二次多项式肥效模型存在不符合生产实际的两个缺陷，即：单位养分增产量与施肥量之间的函数采用线性模型；最高施肥量之前施肥的增产效应与最高施肥量之后施肥的减产效应是对称关系。众所周知，一个数学模型的科学性和应用价值依赖于它的假定条件与植物营养过程实际情况的一致性。如果不能有效克服这两个缺陷，在应用上出现大量非典型肥效模型就不足为奇。

3 肥料效应函数模型研究展望

测土配方施肥技术发展至今，已形成了“先效应后测土”和“先测土后效应”两大技术路线[2]。无论采用哪种技术路线，确定作物推荐施肥量均离不开肥料效应函数的建立和应用。王兴仁等[1]曾对经验肥效模型的优化方向提出许多建议，至今仍然具有重要参考价值。令人遗憾的是，近十多年来针对肥效模型本身的基础和应用基础研究文献鲜见公开发表。因此，笔者针对当前测土配方施肥工作的需要，结合个人的工作经验和认识，谈一谈肥料效应函数模型应用基础研究的若干建议，以供相关研究参考。

3.1 肥效模型多重共线性和异方差问题的补救措施

多项式肥效模型在数学形式上是一种非线性模型，人们往往忽视这种模型中多重共线性和异方差的问题。故这种模型中是否存在多重共线性和异方差、会产生什么危害以及如何消除等问题，均鲜见有相关研究报道。事实上，多项式模型在建模时都进行了线性转换。表2、表3和图1的分析表明，多项式肥效模型存在严重的多重共线性问题，而且误差项的方差随作物产量的提高而增大。当肥效模型存在严重的多重共线性或者试验资料存在严重的异

方差时，如果仍用普通最小二乘法估计模型系数，就会造成系数值失真、方程显著性检验失效和应用效果极差等严重后果。

数理统计学家已经提出了消除或缓解多重共线性和异方差的许多方法。对多重共线性问题，提出了剔除不重要自变量、扩大样品容量法，或者采用有偏估计来提高估计量的稳定性，如岭回归、因子分析、主成分分析和偏最小二乘法等[40-41]。对异方差问题，提出了诸如加权最小二乘、博克斯-考克斯（Box-Cox）变换和方差稳定性变换等方法[40-41]。但是，这些方法是否有效，还取决于样本数据的性质（样本容量、方差变异程度、自变量结构以及误差方差与自变量之间的关系等）和共线性或异方差的严重程度，目前还没有一个公认的和普遍适用的有效方法。

因此，在应用上，如果根据肥效试验结果建立的回归模型是典型肥效模型，那就不用担心共线性和异方差的问题，若是非典型肥效模型，就必须高度重视多重共线性和异方差的检验，并采取相应补救措施。因此，未来的研究应在现代施肥理论指导下，针对作物营养特点、区域生产条件以及施肥效应，探讨不同补救措施对多项式肥效模型的有效性及其适用条件，提出有针对性的建模技术。

3.2　非结构肥效模型的构建

虽然近几十年来多项式肥效模型的建模技术取得重要进展，但受制于这种经验肥效模型的专业假设不合理性以及多重共线性和异方差等问题的干扰，在应用上仍然存在大量非典型式[34]，严重制约着计量精确性和应用价值。王兴仁等[1]认为，根据经验施肥模型进行推荐施肥只是施肥技术发展的初级阶段，我们要为向更高级施肥阶段过渡创造条件。

如何克服当前经验肥效模型专业假设的不合理性？相邻学科的建模理论为我们提供了有益的启迪。与肥效模型理论研究处于相对“停滞”状态相反，近几十年来，种群生态学构建了生物种群增长变化规律的基本模型框架[48]，包括结构模型、经验回归模型和非结构模型等3个类别[49]。其中，非结构模型是把种群响应过程的理论定量与经验公式相互结合而建立的一种半机理半经验的数学模型，建模较简单，模型参数有明确的物理意义，是研究和应用最多的种群生态学模型。将植物营养学肥效模型与种群生态学模型比对，就能发现：作物养分吸收机理模型类似于种群生态学的第一类模型，肥效回归方程则类似于第二类模型，但缺少了种群生态学中飞速发展的第三类模型，即非结构肥效模型。合理施肥的研究对象是大田农作物，而大田农作物就相当于生态学中的“种群”，因而种群生态学的相关建模原则、思路和技巧同样适合于构建作物肥效模型。

因此，借鉴种群生态学建模思路，可在探讨单位养分施用量对作物养分吸收、增产量及其动态变化规律基础上探讨新的效应规律，构建一元非结构肥效模型；进而根据植物养分营养功能不可替代性因而养分间具有交互效应的原理，建立二元和三元非结构肥效模型；最后，探讨非结构肥效模型的模拟特性、参数估计方法和推荐施肥技术，结果可为计量施肥提供新的理论模型依据。

3.3　肥效模型实用化——作物肥效参数识别技术研究

当前测土配方施肥技术要实现微观指导，就必需进行土壤测定。但是，我国土地经营高度分散，土壤测定在基层经常会遇到代表性土样采集难、测试费用高和常误过农时等目前还难以克服的困难。为此，探讨不测土的推荐施肥技术可对测土施肥起到有益的补充。近十年来，我国在测土配方施肥工作中对主要农作物进行了大量的氮磷钾田间肥效试验，为开展作物肥效参数识别技术研究提供了坚实的基础。在这一方面，可以利用模式识别、数据挖掘等技术手段，根据多年多点肥效试验结果，总结整理主要农作物及其不同区域的肥料效应规律。在较好地克服肥效模型的专业假设不合理性、多重共线性和异方差等科学问题的基础上，建立中国或区域主要农作物的施肥模型，进而研发具有较强科学性和专业逻辑性的推荐施肥软件系统。

在不测土条件下，要实现具有较高准确度的肥效参数识别，首先要在多年多点田间肥效试验基础上，构建试验区域内（如县域）的具体作物施肥类别。这就要对该区域内的作物肥效试验资料进行合理的定量分类，进而建立类特征肥效模型。在这一方面，长期以来人们对聚类分析有关方法的适用性、过程的合理性以及结果的专业有效性等问题重视不够，在实际应用中盲目套用系统聚类分析的情况很多。在未来的研究中应特别重视作物氮磷钾的肥效特点和各种并类方法的数学性质，选择最适宜的聚类方法。另一方面，还应该注意到，如果类与

类之间无显著水平的差别，分类则是无效的，其指导施肥的准确性就难以保证。因此，在划定施肥类别后，还需要对各类之间的均值差异进行显著性检验[50-51]，这是一个不可忽略的技术环节。

在构建了某个区域作物施肥类别后，对于该区域内某个地块或几个临近地块的推荐施肥应属于哪个施肥类别呢？这就涉及式识别问题。根据统计模式识别理论[52]，解决的办法是，先对区域内各个类特征肥效模型的相关地力信息和产量指标等进行统计分析，确定各个类别的统计特征，再将未知施肥类别田块的相应指标与各个已知类别的统计特征进行比较，将它们分别归类到统计特征最相近的一个已知施肥类别中去，并根据该已知类别提出相应的推荐施肥。模式识别的具体方法很多，诸如基于最临近距离的费歇准则判别分析和基于先验信息的贝叶斯准则判别分析等[52]。在将来的工作中，应根据田间肥效试验资料，探讨不同判别分析方法对作物肥效参数识别的适用性和实际可行性。这一研究思路将促使大量的“3414”试验资料真正利用起来，在指导作物合理施肥上发挥更大的作用。

参 考 文 献

[1] 王兴仁，陈新平，张福锁，等. 施肥模型在我国推荐施肥中的应用. 植物营养与肥料学报，1998，4（1）：67—74
Wang X R，Chen X P，Zhang F S，et al. Application of fertilization model for fertilizer recommendation in China（In Chinese）. Plant Nutrition and Fertilizer Science，1998，4（1）：67—74

[2] 金耀青，张中原. 配方施肥方法及其应用. 沈阳：辽宁科学技术出版社，1993：1—64
Jin Y Q，Zhang Z Y. The method of formula fertilization and its application（In Chinese）. Shenyang：Liaoning Science and Technology Press，1993：1—64

[3] Gascho G J，Parker M B. Nitrogen，phosphorus and potassium fertilization of a coastal plain cotton-peanut rotation. Communications in Soil Science and Plant Analysis，2006，37（10）：1485—1499

[4] Halmajan H V，Nastase D，Vasile G，et al. Fertilization practices in oilseed rape in Romania. Agriculture，2007，63：69—72

[5] Petersen J，Thomsen I K，Mattsson L，et al. Christensen. Estimating the crop response to fertilizer nitrogen residues in long-continued field experiments. Nutrient Cycling in Agroecosystems，2012，93（1）：1—12

[6] Thöle H，Richter C，Ehlert D. Strategy of statistical model selection for precision farming on-farm experiments. Precision Agriculture，2013，14（4）：434—449

[7] 王兴仁. 二元二次肥料效应曲面等产线图在科学施肥中的位置（一）. 土壤通报，1985，16（1）：30—34
Wan X R. The positions of contour map of yield of binary quadratic fertilizer response curve in scientific fertilization（part 1）（In Chinese）. Chinese Journa1 of Soil Science，1985，16（1）：30—34

[8] 王兴仁. 二元二次肥料效应曲面等产线图在科学施肥中的位置（二）. 土壤通报，1985，16（2）：86—88
Wan X R. The positions of contour map of yield of binary quadratic fertilizer response curve in scientific fertilization（part 2）（In Chinese）. Chinese Journa1 of Soil Science，1985，16（2）：86—88

[9] 章明清，林仁埙，林代炎，等. 极值判别分析在三元肥效模型推荐施肥中的作用. 福建农业学报，1995，10（2）：54—59
Zhang M Q，Lin R X，Lin D Y，et al. Function of distinguish analysis on extreme value in recommendatory fertilization for three-fertilizer efficiency model（In Chinese）. Fujian Journal of Agricultural Sciences，1995，10（2）：54—59

[10] 李娟，章明清，孔庆波，等. 福建早稻测土配方施肥指标体系研究. 植物营养与肥料学报，2010，16（4）：938—946
Li J，Zhang M Q，Kong Q B，et al. Soil testing and formula fertilization index for early rice in Fujian Province（In Chinese）. Plant Nutrition and Fertilizer Science，2010，16（4）：938—946

[11] 杨俐苹，白由路，王贺，等. 测土配方施肥指标体系建立中“3414”试验方案应用探讨——以内蒙古海拉尔地区油菜“3414”试验为例. 植物营养与肥料学报，2011，17（4）：1018—1023
Yang L P，Bai Y L，Wan H，et al. Application of “3414” field trial design for establishing soil testing and fertilizer recommendation index（In Chinese）. Plant Nutrition and Fertilizer Science，2011，17（4）：1018—1023

[12] 戢林，张锡洲，李廷轩. 基于“3414”试验的川中丘陵区水稻测土配方施肥指标体系构建. 中国农业科学，2011，44（1）：84—92
Ji L，Zhang X Z，Li T X. Establishing fertilization recommendation index of paddy soil based on the “3414” field experiments in the middle of Sichuan hilly regions（In Chinese）. Scientia Agricultura Sinica，2011，44（1）：84—92

[13] Valkama E, Uusitalo R, Turtola E. Yield response models to phosphorus application: a research synthesis of Finnish field trials to optimize fertilizer P use of cereals. Nutrient Cycling in Agroecosystems, 2011, 91 (1): 1—15

[14] Gregoret M C, Zorita M D, Dardanelli J, et al. Regional model for nitrogen fertilization of site-specific rainfed corn in haplustolls of the central Pampas, Argentina. Precision Agriculture, 2011, 12 (6): 831—849

[15] 刘芬，同延安，王小英，等. 陕西关中灌区冬小麦施肥指标研究. 土壤学报，2013，50 (3)：556—563
Liu F, Tong Y A, Wang X Y, et al. Indices for fertilization of winter wheat in Guangzhong irrigation area of Shaanxi (In Chinese). Acta Pedologica Sinica, 2013, 50 (3): 556—563

[16] 李仁岗. 肥料效应函数. 北京：农业出版社，1987：1—42
Li R G. Fertilizer response function (In Chinese). Beijing: Agriculture Press, 1987: 1—42

[17] France J, Thomley H M. 王兴仁，译. 肥料效应数学模型. 国外农业—土壤肥料，1987 (5)：38—42
France J, Thomley H.M. Wang X R. trans. Mathematical model of fertilizer response (In Chinese). The Foreign Agriculture: Soil Fertilizer, 1987 (5): 38—42

[18] Cerrato M E, B1ackmer A M. Comparision of models for describing corn yield response to nitrogen fertilizer. Agronomy Journal, 1990, 82 (1): 138—143

[19] 陈伦寿，李仁岗. 农田施肥原理与实践. 北京：农业出版社，1984：1—87
Chen L S, Li R G. Farmland fertilization principle and practice (In Chinese). Beijing: Agriculture Press, 1984: 1—87

[20] Bay T F, Schoney R A. Data analysis with computer graphics: Production function. American Journal of Agricultural Economics, 1982, 64 (2): 289—297

[21] 杨卓亚，毛达如，黄金龙，等. 基于年景变化的施肥决策. 北京农业大学学报，1995，21 (s2)：17—22
Yang Z Y, Mao D R, Huang J L, et al. Fertilization strategy for different crop yield year type (In Chinese). Acta Agriculturae Universitatis Pekinensis, 1995, 21 (s2): 179—22

[22] 耿兴元，毛达如，曹一平. 土壤肥力模糊定量化评价（判）系统的建立. 北京农业大学学报，1995，21 (s2)：23—28
Geng X Y, Mao D R, Cao Y P. A fuzzy system for quantitative evaluation of soil fertility (In Chinese). Acta Agriculturae Universitatis Pekinensis, 1995, 21 (s2): 23—28

[23] 毛达如，张承东. 推荐施肥技术中施肥模型与试验设计的研究. 土壤通报，1991，22 (5)：216—218
Mao D R, Zhang C D. Fertilization model and the experiment design of fertilization recommendation technology (In Chinese). Chinese Journa1 of Soil Science, 1991, 22 (5): 216—218

[24] 杨靖一，Wadsworth G A，Greenwood D J. 三种蔬菜N肥效应曲线的比较研究. 植物营养与肥料学报，1995，1 (1)：71—78
Yang J Y, Wadsworth G A, Greenwood D J. Comparative study on three kinds of vegetables response to N fertilizer curve (In Chinese). Plant Nutrition and Fertilizer Science, 1995, 1 (1): 71—78

[25] 陈新平，周金池，王兴仁，等. 小麦-玉米轮作制中氮肥效应模型的选择——经济和环境效益分析. 土壤学报，2000，37 (3)：346—354
Chen X P, Zhou J C, Wang X R, et al. Economic and environmental evaluation on models for describing crop yield response to nitrogen fertilizers at winter-wheat and summer-corn rotation system (In Chinese). Acta Pedologica Sinica, 2000, 37 (3): 346—354

[26] Middleton K R. Economic control of fertilizer in highly productive pastoral systems. V. Extending advice through the Mitscherlich-Liebig model. Fertilizer Research. 1984 (5): 77—98

[27] 从容. 新的养分效应数学模型——对Mitsherlich方程的补充. 生态学报，1991，11 (4)：388—390
Cong R. A new mathematical model for nutrient effect-Mitsherlich's equation supplement (In Chinese). Acta Ecologica Sinica, 1991, 11 (4): 388—390

[28] 侯彦林. 通用施肥模型及其应用. 农业环境科学学报，2011，30 (10)：1917—1924
Hou Y L. Universal fertilization model and its application (In Chinese). Journal of Agro-Environment Science, 2011, 30 (10): 1917—1924

[29] Wu P, Fang P, Wu L, et al. Application of a rice field experimental error distribution function to nitrogen-phosphorus-potassium fertilizer response model analysis. Nutrient Cycling in Agroecosystems, 1997, 47 (1): 1—5

[30] 吴平，陶勤南. 氮磷钾肥效模型的研究及其应用. 浙江农业大学学报，1989，15 (4)：383—388
Wu P, Tao Q N. Study on N, P and K fertilizer response model and its application (In Chinese). Journal of Zhejiang Agricultural University, 1989, 15 (4): 383—388

[31] 王圣瑞，陈新平，高祥照，等. “3414”肥料试验模型拟合的探讨. 植物营养与肥料学报，2002，8 (4)：409—413

Wang S R, Chen X P, Gao X Z, et al. Study on simulation of "3414" fertilizer experiments (In Chinese). Plant Nutrition and Fertilizing Science, 2002, 8 (4): 409—413

[32] 王兴仁，张福锁，杨靖一，等. 现代肥料试验设计. 北京：中国农业出版社，1996：93—95
Wang X R, Zhang F S, Yang J Y, et al. Experiment design of modern fertilizer (In Chinese). Beijing: China Agriculture Press, 1996: 93—95

[33] 章明清. 米氏肥效方程的灰色建模法. 土壤通报，1997，28 (1)：18—19
Zhang M Q. Gray modeling method of Mitsherlich fertilizer response equations (In Chinese). Chinese Journa1 of Soil Science, 1997, 28 (1): 18—19

[34] 章明清，徐志平，姚宝全，等. Monte Carlo 法在多元肥效模型参数估计和推荐施肥中的应用. 植物营养与肥料学报，2009，15 (2)：366—373
Zhang M Q, Xu Z P, Yao B Q, et al. Using Monte Carlo method for parameter estimation and fertilization recommendation of multivariate fertilizer response model (In Chinese). Plant Nutrition and Fertilizing Science, 2009, 15 (2): 366—373

[35] Colwell J D. The derivation of fertilizer recommendations for crops in non-uniform environment. Fertilizer, Crop Quality and Economy, 1974: 936—961

[36] 王兴仁，陈伦寿，毛达如，等. 分类回归综合法及其在区域施肥决策中的应用. 土壤通报，1989，20 (1)：17—21
Wang X R, Chen L S, Mao D R, et al. Classification of regression synthesis and its application for regional fertilization decision-making (In Chinese). Chinese Journa1 of Soil Science, 1989, 20 (1): 17—21

[37] 毛达如，张承东. 多点肥料效应函数的动态聚类方法. 北京农业大学学报，1991，17 (2)：49—54
Mao D R, Zhang C D. Cluster analysis of quadratic response function on the fertilizer dispersed experiment (In Chinese). Acta Agriculturae Universitatis Pekinensis, 1991, 17 (2): 49—54

[38] 杨守春，陈伦寿. 黄淮海平原主要作物优化施肥与土壤培肥研究总论//黄淮海平原主要作物优化施肥与土壤培肥技术. 北京：中国农业科学技术出版社，1991：1—26
Yang S C, Chen L S. Summary of optimized fertilization for main crop and improvement of soil fertility at HuangHuaiHai Plain//Optimized fertilization technology for main crop and improvement of soil fertility at Huanghuaihai Plain (In Chinese). Beijing: Chinese Agricultural Science and Technology Press, 1991: 1—26

[39] 吴良欢，陶勤南. 水稻肥料多点试验聚类分析阈值及其应用. 中国水稻科学，2000，14 (3)：144—148
Wu L H, Tao Q N. Threshold of cluster analysis for rice dispersed fertilizer experiments and its application (In Chinese). Chinese Journal of Rice Science, 2000, 14 (3): 144—148

[40] Gujarati D N, Porter D C, 费剑平，译. 计量经济学基础 (上册). 第5版. 北京：中国人民大学出版社，2011：313—399
Gujarati D N, Porter D C. Fei J P. trans. Econometrics foundation (the first volume) (In Chinese). 5th ed. Beijing: China Renmin University Press, 2011: 313—399

[41] 何晓群，刘文卿. 应用回归分析. 第3版. 北京：中国人民大学出版社，2013：158—170
He X Q, Liu W Q. Applied regression analysis (In Chinese). 3rd ed. Beijing: China Renmin University Press, 2013: 158—170

[42] 孙文凯. 多重共线性问题评述. 山东经济，2010 (4)：118—126
Sun W K. Review on multicollinearity problems (In Chinese). Shandong Economy, 2010 (4): 118—126

[43] Montgomery D C, Peck E A, Vining G G. 王辰勇，译. 线性回归分析导论. 第5版. 北京：机械工业出版社，2016：91—268
Montgomery D C, Peck E A, Vining G G. Wang C Y. trans. Introduction to linear regression analysis (In Chinese). 5th ed. Beijing: China Machine Press, 2016: 91—268

[44] 马雄威. 线性回归方程中多重共线性诊断方法及其实证分析. 华中农业大学学报 (社会科学版)，2008 (2)：78—81，85
Ma X W. Multicollinearity diagnosis methods of linear regression equation and its empirical analysis (In Chinese). Journal of Huazhong Agricultural University (Social Sciences Edition), 2008 (2): 78—81, 85

[45] 尹光霞. 多元线性回归模型中的异方差性问题. 湖北大学学报 (自然科学版)，2003，25 (2)：121—125
Yin G X. Problems on heteroscedasticity in multilinear regression models (In Chinese). Journal of Hubei University (Natural Science Edition), 2003, 25 (2): 121—125

[46] 孔庆波，章明清，李娟，等. 福建省晚稻测土配方施肥指标体系研究. 热带作物学报，2010，31 (11)：1873—1880
Kong Q B, Zhang M Q, Li J, et al. The study of soil test and formula fertilization index system on late rice in Fujian (In Chinese). Chinese Journal of Tropical Crops, 2010, 31 (11): 1873—1880

[47] 李娟，章明清，姚宝全，等. 福建单季稻氮磷钾推荐施

肥量研究. 福建农业学报，2015，30（10）：933—938
Li J，Zhang M Q，Yao B Q，et a1. Recommended N，P and K fertilization for single cropping rice in Fujian（In Chinese）. Fujian Journal of Agricultural Sciences，2015，30（10）：933—938

［48］ 唐三一，肖燕妮. 单种群生物动力系统. 北京：科学出版社，2008：1—23
Tang S Y，Xiao Y N. Biological power system of single species（In Chinese）. Beijing：Science Press，2008：1—23

［49］ 戚以政，汪叔雄. 生物反应动力学与反应器. 第3版. 北京：化学工业出版社，2013：1—39
Qi Y Z，Wang S X. Biological reaction kinetics and reactor（In Chinese）. 3rd ed. Beijing：Chemical Industry Press，2013：1—39

［50］ 刘多森，曾志远. 土壤和环境研究中的数学方法和建模. 北京：农业出版社，1987：134—165
Liu D S，Zheng Z Y. Mathematical method and modeling for soil and environment research（In Chinese）. Beijing：Agriculture Press，1987：134—165

［51］ 傅德印. Q型系统聚类分析中的统计检验问题. 统计与信息论坛，2007，22（3）：10—14
Fu D Y. Statistical test problem in Q systemic clustering analysis（In Chinese）. Statistics and Information Forum，2007，22（3）：10—14

［52］ Webb A R，Copsey K D. 王萍，译. 统计模式识别. 第3版. 北京：电子工业出版社，2015：163—201
Webb A R，Copsey K D. Wang P. trans. Statistical pattern recognition. 3rd ed. Beijing：Publishing House of Electronics Industry，2015：163—201

Progress and Prospect of the Study on Crop-response-to-Fertilization Function Model

ZHANG Mingqing　LI Juan　KONG Qingbo　YAN Fang
（*Soil and Fertilizer Institute*，*Fujian Academy of Agricultural Sciences*，*Fuzhou* 350013，*China*）

Abstract　In the past 40 years，the study and application of crop-response-to-fertilization function model has made significant progresses and has already become the main technical basis for and a branch system of the project of soil-test-based formulated fertilization. The quadratic polynomial model is the most commonly used fertilizer effect model under study and in application. This paper reviewed briefly progresses that have been made in the study on types，applicabilities，experimental designings and，parameter estimation empirical fertilizer effect models，class characteristic fertilizer effect models，non-typical recommended fertilization optimization method and combination of function methods with soil testing and so on. On such a basis，the paper points out that the prevailing fertilizer effect model in the present days has three problems，i.e. multicollinearity，heteroscedasticity and unreasonable professional hypothesis. In quadratic polynomial models strong multicollinearity exists between the one-degree term and the quadratic term，the one-degree term and its interaction effect terms，the quadratic term and its interaction effect terms，and in the square root polynomial model，exists severer multicollinearity. The serious multicollinearity causes errors in “+” or “−” signs of the model coefficient or difficulty to evaluate relationships between independent variables in contribution to crop yield. Model residual analysis shows that fitting residual error of the quadratic polynomial model displays a gradually dispersing funnel-like distribution pattern with increasing rice yield，which indicates that residual variance differs with yield level. Serious heteroscedasticity causes the least squares parameter estimation to be no longer valid，and t test and F test no longer reliable. Besides，the prevailing quadratic polynomial model has two defects in being conformable with practice，that was，linear relationship is used in the function between yield increment per kg nutrient and fertilization rate，and symmetrical relationship is in the function between yield-increasing effect of fertilization before the maximum rate and yield-reducing effect after the maximum rate，which makes it difficult to reflect the actual relationship quantitatively between field fertilization rate and crop yield in the field. The paper also analyzes

causes of the problems and their diagnostic method. Therefore, it is suggested that in-depth study should be done to explore remedial measures to eliminate or relieve the impacts of the defects the multi-factor fertilizer effect model and proper conditions for its application, to develop non-structural fertilizer effect models so as to overcome the irrationality of the professional hypothesis of the empirical model, to unfold development of fertilizer effect parameter identification technologies on the basis of the large volumes of "3414" experimental data, and eventually to realize microscopic guidance using fertilizer effect models and to provide theoretical modeling basis for development of a software system for fertilization recommendation.

Key words Fertilizer effect model; Multicollinearity; Heteroscedasticity; Non-structural model; Fertilizer effect parameters; Parameter identification

（责任编辑：陈荣府）