

DOI: 10.11766/trxb202412010459

CSTR: 32215.14.trxb202412010459

张晴晴, 李想, 王忠富. 非饱和土壤水一维流动有限元法求解编程思路[J]. 土壤学报, 2025, 62(6): 1902–1909.

ZHANG Qingqing, LI Xiang, WANG Zhongfu. A Programming Idea for Solving One-dimensional Unsaturated Infiltration Equation by Finite Element Method[J]. Acta Pedologica Sinica, 2025, 62(6): 1902–1909.

# 非饱和土壤水一维流动有限元法求解编程思路<sup>\*</sup>

张晴晴<sup>1, 2</sup>, 李想<sup>1, 2</sup>, 王忠富<sup>1, 2†</sup>

(1. 江西师范大学地理与环境学院, 南昌 330022; 2. 江西师范大学鄱阳湖湿地与流域研究教育部重点实验室, 南昌 330022)

**摘要:**《新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望》指出我国土壤物理学研究存在的一个问题是原创性研究较少, 其原因之一是从事我国土壤物理学研究的大部分学者数理基础不强, 因此较难在土壤物理过程数值模拟上有突破。土壤物理过程数值模拟的关键方程是理查兹方程。目前关于有限元法求解理查兹方程的论文不少, 但是大多理论性强且可操作性较弱, 对数理基础不强的研究人员而言, 理解与编程实现存在较大困难。因此, 本文旨在提供一份包含详细推导步骤的有限元法求解一维理查兹方程的编程思路:首先通过加权余量方程的建立得到理查兹方程的弱形式, 继而利用雅可比变换和高斯数值积分等方法将弱形式方程转化为非线性代数方程, 最后采用牛顿-拉夫逊法并代入边界条件求解非线性代数方程。基于上述编程思路编写了相应代码, 模拟结果得到了实测土壤入渗试验数据的验证。本文提供的编程思路及代码可让数理基础不强背景的初学研究人员能够较快实现一维理查兹方程有限元法数值模拟, 以期对未来我国在土壤物理过程数值模拟上实现突破起到一些积极作用。

**关键词:**非饱和下渗; 理查兹方程; 有限元法; 体积含水量; 第一类边界条件

中图分类号: S152.4 文献标志码: A

## A Programming Idea for Solving One-dimensional Unsaturated Infiltration Equation by Finite Element Method

ZHANG Qingqing<sup>1, 2</sup>, LI Xiang<sup>1, 2</sup>, WANG Zhongfu<sup>1, 2†</sup>

(1. School of Geography and Environment, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China; 2. Key Laboratory of Poyang Lake Wetland and Watershed Research, Ministry of Education, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

**Abstract:** Some Key Research Fields of Chinese Soil Physics in the New Era: Progresses and Perspectives pointed out that one of the reasons for the lack of original research on soil physics in China is that Chinese scholars engaged in soil physics research lack a strong mathematical foundation. This makes it difficult to achieve breakthroughs in the numerical simulation of soil physical processes. The key equation for numerical simulation of soil physical processes is the Richards equation. Although there are many papers on solving the Richards equation using the finite element method, most are highly theoretical and lack practicality, posing significant challenges for researchers with limited mathematical and physical backgrounds in understanding and programming

\* 国家自然科学基金项目(42201035)和江西省急需紧缺海外人才项目(20232BCJ25048)资助 Supported by the National Natural Science Foundation of China (No.42201035) and the Jiangxi Province Overseas Talent Project (No. 20232BCJ25048)

† 通讯作者 Corresponding author, E-mail: zhongfuwang@jxnu.edu.cn

作者简介: 张晴晴, 女, 山东潍坊人, 硕士研究生, 主要从事土壤水文过程研究。E-mail: 17560271662@163.com

收稿日期: 2024-12-01; 收到修改稿日期: 2025-03-05; 网络首发日期(www.cnki.net): 2025-04-15

implementation. Therefore, this paper aims to present a programming framework incorporating detailed derivation steps for solving the one-dimensional Richards equation using the finite element method. The weak form of the Richards equation was derived by establishing the weighted residual equation. Subsequently, the weak form equation was transformed into a nonlinear algebraic equation by employing Jacobian transformation and Gaussian numerical integration. Finally, the nonlinear algebraic equation was solved using the Newton-Raphson method with boundary condition substitution. The corresponding code developed based on this programming framework demonstrated simulation results validated by experimental data from soil infiltration tests. The programming framework and code provided in this paper enable researchers with limited mathematical and physical backgrounds to efficiently implement numerical simulation of the one-dimensional Richards equation using the finite element method. This effort aims to facilitate potential breakthroughs in numerical modeling of soil physical processes in China, thereby contributing positively to future advancements in this field.

**Key words:** Unsaturated infiltration; Richards equation; Finite element method; Volumetric water content; First boundary condition

非饱和土壤水流动是指土壤中水分未充满全部孔隙时的水分运移<sup>[1]</sup>。降雨时水向土中入渗及对地下水的补给、田间滴灌条件下土壤水分运移等均可简化为非饱和土壤水的一维流动<sup>[2-3]</sup>。

人们对非饱和土壤水流动的研究有较长历史，其科学理论形成始于 1856 年法国工程师达西进行的水分渗透试验<sup>[4]</sup>。理查兹于 1931 年在达西定律和质量守恒原理基础上推导出描述非饱和土壤水流动数学模型——理查兹方程<sup>[5]</sup>。求解理查兹方程需要两个本构关系，即土壤水分特征曲线和土壤导水率曲线，但理查兹未给出这两个本构关系的函数关系式。因此，研究人员后续重点研究这两个本构关系<sup>[6]</sup>。目前广泛使用的本构关系由 Mualem<sup>[7]</sup>和 van Genuchten<sup>[8]</sup>于 1976 年和 1980 年提出。理查兹<sup>[9-10]</sup>方程存在非线性、高阶偏微分等特征，这给非饱和土壤水运动的定量研究带来了许多挑战。随着计算机技术的发展，有限元数值模拟成为解决土壤水分运移问题的主流方法。例如，目前广泛使用的商业模型 HYDRUS 就是基于有限元法求解理查兹方程。

《新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望》一文<sup>[11]</sup>指出“我国土壤物理学虽然发展迅速，队伍不断壮大，在国际上影响力不断提升，但是科研主要集中在少数单位，发展非常不平衡，原创性研究较少，在国际上领先的研究则更加凤毛麟角”。

以有限元法求解理查兹方程为例，现有的学习材料主要是相关的中文<sup>[12-14]</sup>和英文学术论文<sup>[15]</sup>、教科书<sup>[16]</sup>和商业模型 HYDRUS 用户手册<sup>[17]</sup>。上述材料理论性偏强，缺乏针对数理基础薄弱读者的详细解释和逐步引导，导致学习难度大，编程则更是难

以开展且消耗精力。

不但土壤物理领域的研究人员有上述困境，其他领域的研究人员也有类似困扰。化工领域的毕超<sup>[18]</sup>针对这一问题撰写了《计算流体力学有限元方法及其编程详解》一书。该书的写作模式是十分适用于数理基础不强读者入门计算流体力学的有限元法。有限元法求解理查兹方程的本质是用该方法求解流体力学问题。该书给出了不少流体力学案例的编程思路和代码，但是没有给出理查兹方程求解的具体案例。

因此，本文依照此书的写作模式，提供了详细的可操作性强的有限元法求解理查兹方程的编程思路及相应代码。能够让有需要的相关研究人员较快入门非饱和土壤水一维流动有限元法求解，为后续解决更为复杂的土壤物理数值模拟问题奠定基础。针对彭新华等<sup>[11]</sup>提出的我国在土壤物理过程数值模拟上实现突破存在一定难度的问题起到一些积极的作用。

## 1 一维理查兹方程

一维理查兹方程以体积含水量  $\theta$  [ $L^3L^{-3}$ ] 为因变量的公式为：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = 0 \quad (1)$$

式中， $t$  [T] 为时间， $z$  [L] 为土壤深度， $K(\theta)$  [ $LT^{-1}$ ] 为非饱和土壤导水率， $D(\theta)$  [ $L^2T^{-1}$ ] 为土壤水扩散率。

本文采用 Celia 等<sup>[10]</sup>文中的土壤入渗试验参数：  
初始条件为：

$$t=0, \theta_0=0.1099 \quad (2a)$$

上边界条件为：

$$\theta_1=0.2003 \quad (2b)$$

下边界条件为：

$$\theta_2=0.1009 \quad (2c)$$

Celia 等<sup>[10]</sup>文中给出的基于 Mualem-van Genuchten 模型<sup>[7-8]</sup>的土壤水分特征曲线和土壤导水率曲线为：

$$\theta(h)=\frac{\theta_s-\theta_r}{\left[1+(\alpha|h|)^n\right]^m}+\theta_r \quad (3)$$

$$K(h)=k_s \frac{\left\{1-(\alpha|h|)^{n-1}\left[1+(\alpha|h|)^n\right]^{-m}\right\}^2}{\left[1+(\alpha|h|)^n\right]^{m/2}} \quad (4)$$

表 1 土壤水力参数

Table 1 Soil hydraulic parameters

参数 Parameters	$\theta_s/(cm^3 \cdot cm^{-3})$	$\theta_r/(cm^3 \cdot cm^{-3})$	$a/cm^{-1}$	n	m	$k_s/(cm \cdot s^{-1})$
数值 Value	0.368	0.102	0.0335	2.0	0.5	0.00922

式中,  $h[L]$  为土壤基质势,  $\theta_s[L^3 L^{-3}]$  为饱和土壤含水率,  $\theta_r[L^3 L^{-3}]$  为滞留土壤残余含水率,  $\alpha[L^{-1}]$  为与进气吸力有关的参数,  $n$  为形状系数, 其中  $m=1-1/n$ ,  $k_s[LT^{-1}]$  为土壤饱和导水率。上述各参数值列于表 1。

由式 (3) 得：

$$|h|=\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/m}-1\right]^{1/n} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (4), 得：

$$K(\theta)=k_s \frac{\left\{1-\left[\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/m}-1\right]^{(n-1)/n} \cdot\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{-1}\right\}^2}{\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/2}} \quad (6)$$

对式 (3) 求导, 得：

$$\frac{d\theta}{dh}=\frac{(\theta_s-\theta_r)(-m)n\alpha\left[\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/m}-1\right]^{(n-1)/n}}{\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{(m+1)/m}} \quad (7)$$

式 (7) 为比水容重, 记为  $C(\theta)$ , 代入土壤水扩散率公式  $D(\theta)=K(\theta)/C(\theta)$ , 得：

$$D(\theta)=k_s \frac{\left\{1-\left[\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/m}-1\right]^{(n-1)/n} \cdot\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{-1}\right\}^2 \cdot\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{(m+1)/m}}{\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/2} \cdot(\theta_s-\theta_r)(-m)n\alpha\left[\left(\frac{\theta_s-\theta_r}{\theta-\theta_r}\right)^{1/m}-1\right]^{(n-1)/n}} \quad (8)$$

由此可知式 (1) 中非饱和土壤导水率和土壤水扩散率表达式。

## 2 一维理查兹方程有限元法求解编程思路

### 2.1 计算区域的离散

首先对一维理查兹方程的计算区域进行离散, 相关内容详见毕超一书<sup>[18]</sup>。

### 2.2 插值函数和权函数

采用高斯积分法计算积分, 积分区域为  $[-1, 1]$ , 单元的坐标轴记为  $\xi$ , 坐标轴原点为 0 点。一维理查兹方程在离散后的每一个单元上对应的插值函数  $\phi(\xi)$  为:

$$\phi=(\phi_1 \phi_2 \phi_3)^T \quad (9)$$

单元内任意函数在原来的坐标轴  $z$  轴上可用二次多项式近似：

$$\theta(z) = C_1^e + C_2^e z + C_3^e z^2 \quad (10)$$

式中， $C_1^e$ 、 $C_2^e$  和  $C_3^e$  为待定系数，可由单元上的三个节点坐标及其对应的函数值  $(z_a^e, \theta_1^e)$ 、 $(\frac{z_a^e + z_b^e}{2}, \theta_2^e)$  和  $(z_b^e, \theta_3^e)$  代入式 (10) 求得。将求得的  $C_1^e$ 、 $C_2^e$  和  $C_3^e$  再代入式 (10)，经过变换可得单元内任意一点函数值的表达式：

$$\theta = \phi_1 \theta_1^e + \phi_2 \theta_2^e + \phi_3 \theta_3^e = \phi^T \theta_I^e \quad (11)$$

式中， $\phi_1$ 、 $\phi_2$  和  $\phi_3$  的表达式为：

$$\phi_1 = \frac{[(z_b^e - z_a^e) - (z - z_a^e)][(z_b^e - z_a^e) - 2(z - z_a^e)]}{(z_b^e - z_a^e)} \quad (12a)$$

$$\phi_2 = 4 \frac{(z - z_a^e)[(z_b^e - z_a^e) - (z - z_a^e)]}{(z_b^e - z_a^e)^2} \quad (12b)$$

$$\phi_3 = \frac{(z - z_a^e)}{(z_b^e - z_a^e)} \frac{[2(z - z_a^e) - (z_b^e - z_a^e)]}{(z_b^e - z_a^e)} \quad (12c)$$

利用坐标轴变换等比关系：

$$\frac{z - z_a^e}{z_b^e - z_a^e} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{\xi + 1}{2} \quad (13)$$

式 (12) 中  $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $\phi_3$  可转为：

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (14a)$$

$$\int_a^b \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} dz + \left\{ \phi \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right\}_a^b - \int_a^b \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (19)$$

由于 Celia 等<sup>[10]</sup>文中使用的上、下边界条件为

第一类边界条件，即  $\left\{ \phi \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right\}_a^b = 0$ ，则

$$\phi_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (14b)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (14c)$$

插值函数对坐标  $\xi$  的导数为：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} = -2\xi \quad (15b)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2} \quad (15c)$$

### 2.3 加权余量方程的建立

伽辽金有限元方法中权函数等于插值函数。权函数与式 (1) 相乘，并在任一定义域  $[a, b]$  内积分，得：

$$\int_a^b \phi \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right\} dz = 0 \quad (16)$$

式 (16) 简化得：

$$\int_a^b \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} dz + \int_a^b \phi \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (17)$$

采用分部积分法对式 (17) 中第二部分作如下变换：

$$\begin{aligned} & \int_a^b \phi \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz \\ &= \left\{ \phi \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right\}_a^b - \int_a^b \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (17)，得：

式 (19) 可简化为：

$$\int_a^b \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} dz - \int_a^b \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (20)$$

## 2.4 单元有限元方程的建立

建立单元方程时, 需将式(20)的积分区域变换为单元区域。将式(11)代入式(20), 得:

$$\int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi \frac{\partial \phi^T \theta_I^e}{\partial t} dz - \int_{z_1^e}^{z_2^e} \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\phi^T \theta_I^e) - D(\phi^T \theta_I^e) \frac{\partial \phi^T \theta_I^e}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (21)$$

式(21)简化得:

$$\frac{\partial \theta_I^e}{\partial t} \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi \phi^T dz - \int_{z_1^e}^{z_2^e} \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\phi^T \theta_I^e) - D(\phi^T \theta_I^e) \frac{\partial \phi^T \theta_I^e}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (22)$$

采用后向差分法对式(22)中  $\frac{\partial \theta_I^e}{\partial t}$  进行处理, 得:

$$\frac{\partial \theta_I^e}{\partial t} = \frac{\theta_I^{e(i)} - \theta_I^{e(i-1)}}{\Delta t} \quad (23)$$

式(23)中  $\theta_I^{e(i)}$  为当前时刻值,  $\theta_I^{e(i-1)}$  为前一时刻值。

将式(23)代入式(22), 得:

$$\frac{\theta_I^{e(i)} - \theta_I^{e(i-1)}}{\Delta t} \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi \phi^T dz - \int_{z_1^e}^{z_2^e} \frac{d\phi}{dz} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (24)$$

采用高斯数值积分法求解式(24)中的积分项。利用雅可比矩阵可将坐标  $z$  变换到坐标  $\xi$ :

$$\int_{z_1^e}^{z_2^e} G(z) dz = \int_{-1}^1 G^*(\xi) |J| d\xi \quad (25)$$

式(25)中  $G(z)$  为任意函数,  $J$  为雅可比矩阵, 对于一维问题, 其具体形式如下:

$$J = \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (26)$$

根据导数关系:

$$R'(\theta) = M - \Delta t \sum_{i=1}^6 \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J|' \quad (32)$$

为利于表示, 令  $\phi^T \theta_I^{e(i)} = \theta_i$ , 得:

$$R'(\theta) = M - \Delta t \sum_{i=1}^6 \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\theta_i) - D(\theta_i) J^{-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_i} \right] |J| \quad (33)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} J^{-1} \quad (27)$$

对式(24)进行积分变换并将式(27)代入, 得:

$$\frac{\theta_I^{e(i)} - \theta_I^{e(i-1)}}{\Delta t} \int_{-1}^1 \phi \phi^T |J| d\xi - \int_{-1}^1 \frac{d\phi}{d\xi} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi} J^{-1} \right] |J| d\xi = 0 \quad (28)$$

利用高斯数值积分公式, 式(28)可变换为:

$$\frac{\theta_I^{e(i)} - \theta_I^{e(i-1)}}{\Delta t} \sum_{i=1}^6 \omega_i \phi \phi^T |J| - \sum_{i=1}^6 \omega_i \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J| = 0 \quad (29)$$

式中,  $\omega_i$  为积分权,  $\xi_i$  为积分点。

式(29)中  $\sum_{i=1}^6 \omega_i \phi \phi^T |J|$  为质量矩阵, 记为  $M$ , 则式

(29) 简化为:

$$M \theta_I^{e(i)} - M \theta_I^{e(i-1)} - \Delta t \sum_{i=1}^6 \omega_i \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J| = 0 \quad (30)$$

## 2.5 牛顿-拉夫逊法求解方程

式(30)为非线性代数式, 故可利用牛顿-拉夫逊法求解。令式(30)等于  $R(\theta)$ , 得:

$$R(\theta) = M \theta_I^{e(i)} - M \theta_I^{e(i-1)} - \Delta t \sum_{i=1}^6 \omega_i \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J| = 0 \quad (31)$$

对式(31)中的当前时刻值求导, 得:

$$R'(\theta) = M \theta_I^{e(i)} - M \theta_I^{e(i-1)} - \Delta t \sum_{i=1}^6 \omega_i \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J|' \quad (32)$$

令式(33)中的  $K(\theta_i) - D(\theta_i) J^{-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_i} = j_k$ ,

$$J^{-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_i} = g_k, \text{ 得:}$$

$$j_k(\theta_i, g_k) = K(\theta_i) - D(\theta_i)g_k \quad (34)$$

利用全微分法对式(34)求导, 得:

$$dj_k = \frac{\partial j_k}{\partial \theta_i} d\theta_i + \frac{\partial j_k}{\partial g_k} dg_k = [K'(\theta_i) - g_k \cdot D'(\theta_i)] d\theta_i - D(\theta_i) dg_k \quad (35)$$

将式(35)代入式(33), 得:

$$R'(\theta) = M - nt \sum_{i=1}^6 \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \{ [K'(\theta_i) - g_k D'(\theta_i)] d\theta_i - D(\theta_i) dg_k \} |J| \quad (36)$$

$$\text{式中, } d\theta_i = \phi^T, \quad dg_k = \frac{d\phi^T}{d\xi} J^{-1}.$$

令 式 (31) 中

$$\sum_{i=1}^6 \omega_i \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \left[ K(\phi^T \theta_I^{e(i)}) - D(\phi^T \theta_I^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_I^{e(i)}}{\partial \xi_i} J^{-1} \right] |J| = F$$

, 则式(31)可简化为:

$$R(\theta) = M \theta_I^{e(i)} - M \theta_I^{e(i-1)} - \Delta t \cdot F = 0 \quad (37)$$

$$\text{令式(36)中 } \sum_{i=1}^6 \frac{d\phi}{d\xi_i} J^{-1} \{ [K'(\theta_i) - g_k D'(\theta_i)]$$

$d\theta_i - D(\theta_i) dg_k \} |J| = T$ , 则式(36)可简化为:

$$R'(\theta) = M - \Delta t \cdot T \quad (38)$$

由牛顿-拉夫逊法可得:

$$\Delta \theta = -\frac{R(\theta)}{R'(\theta)} \quad (39)$$

将  $R(\theta)$  和  $R'(\theta)$  代入式(39)并简化, 得:

$$M \cdot \Delta \theta - \Delta t \cdot T \cdot \Delta \theta + M \theta_I^{e(i)} - M \theta_I^{e(i-1)} = \Delta t \cdot F \quad (40)$$

## 2.6 总体方程的组合

上述方程的组合方法可详见毕超<sup>[18]</sup>—书。

## 2.7 代入边界条件求解

组合后可得到一个矩阵形式的方程组, 根据 Reddy<sup>[19]</sup>—书的方法代入第一类边界条件求解。为便于说明, 以式(41)为例:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 = \Delta 1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 = \Delta 2 \end{cases} = \begin{cases} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{cases} \quad (41)$$

式中,  $U_1$  和  $U_4$  的值分别为  $\Delta 1$  和  $\Delta 2$ , 即代表两个端点已知的第一类边界条件。

由矩阵计算得:

$$K_{11}U_1 + K_{12}U_2 + K_{13}U_3 + K_{14}U_4 = Q_1 \quad (42a)$$

$$K_{21}U_1 + K_{22}U_2 + K_{23}U_3 + K_{24}U_4 = Q_2 \quad (42b)$$

$$K_{31}U_1 + K_{32}U_2 + K_{33}U_3 + K_{34}U_4 = Q_3 \quad (42c)$$

$$K_{41}U_1 + K_{42}U_2 + K_{43}U_3 + K_{44}U_4 = Q_4 \quad (42d)$$

未知的  $U_2$  和  $U_3$  只需两个方程即可求解, 故舍去式(42a)与式(42d)。将式(42b)与式(42c)进一步拆分形成方阵, 得:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} U_2 \\ U_3 \end{cases} + \begin{bmatrix} K_{21} & K_{24} \\ K_{31} & K_{34} \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 \\ U_4 \end{cases} = \begin{cases} Q_2 \\ Q_3 \end{cases} \quad (43)$$

令  $p$  为已知节点,  $f$  为自由节点, 即  $p=1, 4, f=2, 3$ 。则式(43)可简化为:

$$K(f, f)U(f, 1) + K(f, p) \cdot U(p, 1) = Q(f, 1) \quad (44)$$

式(40)经过组合后的表达式为:

$$M \cdot \Delta \theta - \Delta t \cdot T \cdot \Delta \theta + M \theta^{(i)} - M \theta^{(i-1)} = \Delta t \cdot F \quad (45)$$

类似式(41)—式(44), 式(45)同理可转换为:

$$\begin{aligned} & M(f, f)\Delta \theta(f, 1) + M(f, p)\Delta \theta(p, 1) - \Delta t [T(f, f)\Delta \theta(f, 1) + T(f, p)\Delta \theta(p, 1)] \\ & + M(f, f)\theta^{(i)}(f, 1) + M(f, p)\theta^{(i)}(p, 1) \\ & - [M(f, f)\theta^{(i-1)}(f, 1) + M(f, p)\theta^{(i-1)}(p, 1)] = \Delta t F(f, 1) \end{aligned} \quad (46)$$

由于已知节点的数值是常数，则 $\Delta\theta(p,1)=0$ ，式(46)可简化为：

$$\begin{aligned} & \left[ M(f,f) - \Delta t \cdot T(f,f) \right] \Delta\theta(f,1) = \Delta t \cdot F(f,1) - M(f,f) \cdot \\ & \left[ \theta^{(i)}(f,1) - \theta^{(i-1)}(f,1) \right] - M(f,p) \left[ \theta^{(i)}(p,1) - \theta^{(i-1)}(p,1) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

经矩阵计算可得 $\Delta\theta(f,1)$ ，继而由牛顿-拉夫逊法得：

$$\theta^{(f,i)} = \theta^{(f,i-1)} + \Delta\theta(f,1) \quad (48)$$

根据式(48)从初始条件开始计算，即可求得除了上、下边界条件外的任一时刻土壤剖面中的土壤体积含水量。

### 3 模型实现

依照上述编程思路即可实现有限元法求解两端点均为第一类边界条件的一维体积含水量型理查兹方程。根据 Celia 等<sup>[10]</sup>试验资料，本文时间步长选取 $\Delta t=1$  s，空间步长选取 $\Delta z=2.5$  cm，程序运算总时长为 86 400 s。本文采用 MATLAB 进行代码编写。将本文计算结果和 Celia 等<sup>[10]</sup>土壤入渗试验数据进行对比(图 1)，纳什效率系数=0.9998，纳什效率系数表示模拟值与实测值随时间变化的符合程度，因此证明本文提供的编程思路的可靠性。

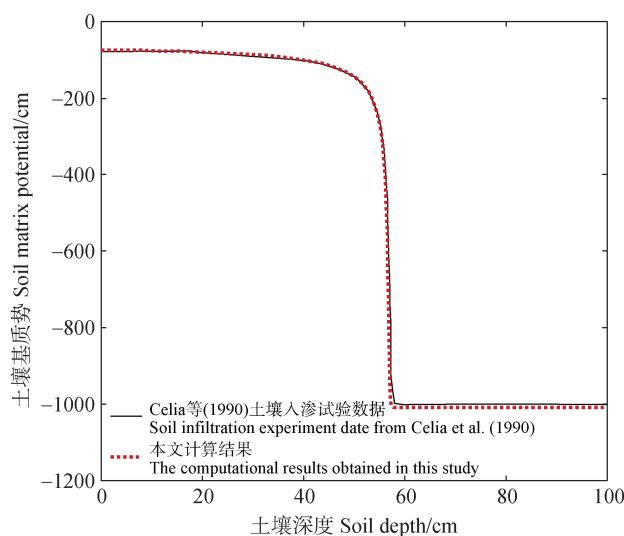


图 1 垂直下渗土壤基质势随土壤深度变化曲线

Fig. 1 Variation curve of soil matrix potential with soil depth in vertical infiltration

### 4 结 论

非饱和土壤水一维流动有限元法求解编程思路始于将权函数与理查兹方程相乘并在求解域上进行积分，得到的式(16)等价于式(1)。通过分部积分对式(16)进行降阶得式(19)，式(19)可为代入自然边界条件提供便利。式(19)中的体积含水量对时间的导数项用后向差分法进行处理。再利用雅可比矩阵将积分区域转到 $[-1, 1]$ 上，为用高斯数值积分公式计算积分奠定基础。通过上述步骤得到的式(30)为非线性代数式，可用牛顿-拉夫逊法求解。牛顿-拉夫逊法中的求导数项用全微分法处理。最终构建了一个包含所有单元信息和边界条件的矩阵方程，通过代入已知第一类边界条件，基于式(48)可求解除边界外，任意时刻土壤剖面中的土壤体积含水量。相较于已发表的有关有限元法求解理查兹方程的学习材料<sup>[12-17]</sup>，本文对上述编程思路给出了详细的描述，其中关于理查兹方程线性和第一类边界条件处理的步骤对有限元法求解理查兹方程起着关键作用。

我国从事土壤物理研究的大部分学者本科毕业于农业资源与利用专业，数理基础不强，因而在土壤物理过程数值模拟上实现突破存在一定难度<sup>[11]</sup>。本文结合实际情况针对上述问题进行了分析、讨论并提出了一个有益解决上述问题的思路。鉴于自学入门土壤物理过程数值模拟是上述研究人员的主要学习途径，本文以具有两个第一类边界条件的体积含水量为因变量的一维理查兹方程为例，详细描述了相关数值模拟编程思路并提供了相应代码。笔者认为本文提供的编程思路和代码( ScienceDB, <https://doi.org/10.57760/sciencedb.21257>)将会帮助与笔者背景相似的研究人员少走弯路，较快入门土壤物理过程数值模拟，以期为解决我国土壤物理过程数值模拟难以取得突破的问题起到一些积极作用。

### 参考文献 ( References )

- [1] Shao M A, Wang Q J, Huang M B. Soil physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. [邵明安, 王全九, 黄明斌. 土壤物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.]
- [2] Wu J Q, Zhang J F, Gao R. Physical simulation experiments of effects of macropores on soil water infiltration characteristics[J]. Transactions of the

- Chinese Society of Agricultural Engineering, 2009, 25 (10): 13—18. [吴继强, 张建丰, 高瑞. 大孔隙对土壤水分入渗特性影响的物理模拟试验[J]. 农业工程学报, 2009, 25 (10): 13—18.]
- [3] Kang Y H, Wang F X, Liu S P, et al. Effects of water regulation under drip irrigation on potato growth[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2004, 20 (2): 66—72. [康跃虎, 王凤新, 刘士平, 等. 滴灌调控土壤水分对马铃薯生长的影响[J]. 农业工程学报, 2004, 20 (2): 66—72.]
- [4] Lei Z D, Yang S X, Xie S C. Soil water dynamics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988. [雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.]
- [5] Richards L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. Physics, 1931, 1 (5): 318—333.
- [6] Brutsaert W. Some methods of calculating unsaturated permeability[J]. Transactions of the ASAE, 1967, 10(3): 400—404.
- [7] Mualem Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. Water Resources Research, 1976, 12 (3): 513—522.
- [8] van Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Soil Science Society of America Journal, 1980, 44 (5): 892—898.
- [9] Philip J R, Knight J H. On solving the unsaturated flow equation[J]. Soil Science, 1974, 117 (1): 1—13.
- [10] Celia M A, Bouloutas E T, Zarba R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation[J]. Water Resources Research, 1990, 26 (7): 1483—1496.
- [11] Peng X H, Wang Y Q, Jia X X, et al. Some key research fields of Chinese soil physics in the new era: Progresses and perspectives[J]. Acta Pedologica Sinica, 2020, 57 (5): 1071—1087. [彭新华, 王云强, 贾小旭, 等. 新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望[J]. 土壤学报, 2020, 57 (5): 1071—1087.]
- [12] Zhang Y F, Zhang D S, Wu X Q. Numerical simulation for 1-D water flow in unsaturated soils[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2004, 17 (2): 123—127. [张耀峰, 张德生, 武新乾. 一维非饱和土壤水分运动的数值模拟[J]. 纺织高校基础科学学报, 2004, 17 (2): 123—127.]
- [13] Zhao C X. The analysis and the computation for Richards' equation during the infiltration process in saturated and unsaturated soil[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2016. [赵晨霞. 饱和—非饱和土壤渗流过程中 Richards 方程的分析与计算[D]. 兰州: 兰州大学, 2016.]
- [14] Hou Z Z. Numerical calculation for Richards equation with linearized finite element methods[D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology, 2022. [侯真真. Richards 方程的线性化有限元计算[D]. 辽宁大连: 大连理工大学, 2022.]
- [15] Shamir U Y, Harleman D R F. Numerical solutions for dispersion in porous mediums[J]. Water Resources Research, 1967, 3 (2): 557—581.
- [16] Bear J. Dynamics of fluids in porous media[M]. New York: American Elsevier Pub. Co, 1972.
- [17] Simunek J, Saito H, Sakai M, et al. The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media, version 4.17. University of California Riverside, Riverside, California, USA, 2013.
- [18] Bi C. Finite element method of computational fluid dynamics and its detailed programming solution[M]. Beijing: China Machine Press, 2013. [毕超. 计算流体力学有限元方法及其编程详解[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.]
- [19] Reddy J N. An introduction to nonlinear finite element analysis[M]. Cambridge, UK: Oxford University Press, 2004.

(责任编辑: 檀满枝)