

刘嘉城, 李想, 张晴晴, 肖阳洋, 王忠富. 非饱和土壤水二维流动有限元法求解编程思路[J]. 土壤学报, 2026,  
LIU Jiacheng, LI Xiang, ZHANG Qingqing, XIAO Yangyang, WANG Zhongfu. A Programming Idea for Solving Two-Dimensional Unsaturated Infiltration Equation by Finite Element Method[J]. Acta Pedologica Sinica, 2026,

# 非饱和土壤水二维流动有限元法求解编程思路\*

刘嘉城<sup>1,2</sup>, 李 想<sup>1,2</sup>, 张晴晴<sup>1,2</sup>, 肖阳洋<sup>1,2</sup>, 王忠富<sup>1,2†</sup>

(1. 江西师范大学地理与环境学院, 南昌 330022; 2. 江西师范大学鄱阳湖湿地与流域研究教育部重点实验室, 南昌 330022)

**摘 要:** 我国从事土壤物理学研究的大部分研究人员数理基础不强, 导致我国在土壤物理过程数值模拟上有突破存在一定难度。Richards 方程是土壤物理学中模拟土壤水分运移过程的关键方程。目前中文领域中, 关于有限元法数值求解二维 Richards 方程的论文, 主要由具有数学专业背景的研究人员发表。在 AI 时代背景下, 使用 AI 工具能降低数理基础不强的研究人员理解这类数学相关论文的门槛, 但由于上述论文理论性偏强且没有提供配套代码, 该群体通过自学掌握有限元法编程求解二维 Richards 方程仍需耗费大量精力。因此, 本文从数理基础不强研究人员的实际需求出发, 提供一份包含详细推导步骤的有限元法求解二维 Richards 方程的编程思路及相应代码。该编程思路的核心是通过 Green 公式、Jacobian 变换、Gaussian 数值积分等数学方法, 将非线性偏微分方程转为非线性代数方程, 再采用 Newton-Raphson 法, 并结合对角线归一代入法施加边界条件, 最终完成非线性代数方程的求解。基于该编程思路开发的数值模拟代码, 在地下管道渗灌和地表滴灌两种典型灌溉情景下均得到了有效验证。具体而言, 地下管道渗灌条件下, 模拟结果与田间单点源渗灌试验获得的实测数据进行了对照; 地表滴灌条件下, 模拟所得的土壤水分运移过程则与国际广泛采用的 Hydrus 软件计算结果进行了对比。两种情景下, 模拟预测的湿润锋位置均与参照结果良好吻合, 验证了模型的准确性与适用性。本文提供的编程思路及代码, 可帮助数理基础不强背景的研究人员能够较快入门二维 Richards 方程有限元法数值模拟, 以期对未来我国在土壤物理过程数值模拟上有突破起到一些积极作用。

**关键词:** 非饱和下渗; Richards 方程; 有限元法; 体积含水量; 第一类边界条件

**中图分类号:** S152.4

**文献标志码:** A

## A Programming Idea for Solving Two-Dimensional Unsaturated Infiltration Equation by Finite Element Method

LIU Jiacheng<sup>1,2</sup>, LI Xiang<sup>1,2</sup>, ZHANG Qingqing<sup>1,2</sup>, XIAO Yangyang<sup>1,2</sup>, WANG Zhongfu<sup>1,2†</sup>

(1. School of Geography and Environment, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China; 2. Key Laboratory of Poyang Lake Wetland and Watershed Research, Ministry of Education, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

**Abstract:** The Richards equation is a key governing equation for modeling soil water movement in soil physics.

\* 国家自然科学基金项目(42201035)和江西省急需紧缺海外人才项目(20232BCJ25048)资助 Supported by the National Natural Science Foundation of China (No.42201035) and the Jiangxi Province Overseas Talent Project (No. 20232BCJ25048)

† 通讯作者 Corresponding author, E-mail: [zhongfuwang@jxnu.edu.cn](mailto:zhongfuwang@jxnu.edu.cn):

作者简介: 刘嘉城(2005-05-29), 男, 江西萍乡人, 地理科学专业本科生, 研究方向为土壤水文过程。

E-mail:13006290668@163.com

收稿日期: 2026-01-21; 收到修改稿日期: 2026-09-02; 网络首发日期 (www.cnki.net): 年-月-日

However, most researchers engaged in soil physics research in China have relatively weak mathematical and physical foundations, which poses considerable challenges to achieving breakthroughs in the numerical simulation of soil physical processes. Currently, in the Chinese literature, studies focusing on the numerical solution of the two-dimensional Richards equation using the finite element method are primarily conducted by researchers with a mathematical background. In the era of artificial intelligence, AI tools can lower the threshold for researchers with weak mathematical foundations to understand such mathematically oriented papers. Nevertheless, due to the strong theoretical nature of these papers and the absence of supporting source code, researchers in this group still need to invest substantial effort to independently learn and master finite element programming for solving the two-dimensional Richards equation. Therefore, starting from the practical needs of researchers with limited mathematical backgrounds, this paper presents a programming framework with detailed derivation procedures and corresponding code for solving the two-dimensional Richards equation using the finite element method. The core of this framework is to transform the nonlinear partial differential equation into a system of nonlinear algebraic equations through mathematical approaches including Green's theorem, Jacobian transformation, and Gaussian numerical integration. The Newton-Raphson method is then adopted, combined with the diagonal normalization method for imposing boundary conditions, to finally accomplish the solution of the nonlinear algebraic system. The numerical simulation code developed based on this framework has been effectively validated under two typical irrigation scenarios: subsurface pipe infiltration irrigation and surface drip irrigation. Specifically, under subsurface pipe infiltration irrigation, the simulation results were compared with field-measured data from single-point source infiltration experiments. Under surface drip irrigation, the simulated soil water movement processes were compared with computational results from the internationally widely used Hydrus software. In both scenarios, the positions of the simulated wetting fronts were in good agreement with the reference results, verifying the accuracy and applicability of the model. The programming framework and code provided in this paper can help researchers with weak mathematical foundations quickly get started with finite element numerical simulation of the two-dimensional Richards equation, and are expected to play a positive role in promoting future breakthroughs in the numerical simulation of soil physical processes in China.

**Key words:** Unsaturated infiltration; Richards equation; Finite element method; Volumetric water content; First boundary condition

《新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望》<sup>[1]</sup>指出：有多方面的原因导致我国土壤物理学面临科研原创性不足的挑战。其中一个原因是，从事土壤物理学研究的学者大部分本科毕业于农业资源与环境专业，具有较强的农学知识，但数理基础不强，在土壤物理过程数值模拟上取得突破存在一定的难度。

Richards 方程是土壤物理学模拟土壤水分运移的基本方程。目前，中文领域内关于有限元法求解二维 Richards 方程的论文，大多由具备数学专业背景的研究人员撰写，且没有配套代码。这些论文<sup>[2-6]</sup>理论性较强，但普遍缺乏针对数理基础薄弱读者的细致解读和循序渐进的引导。当前人工智能技术可将此类专业文献解读得更为通俗易懂，在一定程度上降低非数学背景研究者的理解门槛。但由于缺乏配套代码，要真正掌握其中内容，仍需投入大量精力，对数理基础薄弱者而言依然存在较大挑战。以西安理工大学应用数学专业赵梦玲所著《二维水分运动及溶质运移的有限元数值模拟》<sup>[2]</sup>为例，针对前人多采用有限差分法求解二维 Richards 方程的现状，该文详细推导了有限元法的求解步骤，并提供了相应的计算程序框图。笔者对国内主流 AI 大语言模型进行了测试，将该论文分别输入 Kimi-K2 (付费版)，豆包 (付费版)，DeepSeek (在线版) 和 Qwen3-coder (在线版)，结果显示，所有模型均无法输出论文中可预测实测数据的二维代码。

美国国家盐土实验室开发的 Hydrus 软件<sup>[7]</sup>，是目前世界各地广泛使用的土壤物理过程

数值模拟软件工具。该软件模拟土壤水分运移过程的核心原理，正是采用有限元法求解 Richards 方程。有研究<sup>[8]</sup>表明，2017—2020 年间，中国学者发表的 Hydrus 主题研究论文达 347 篇，但这些应用研究大多局限于小区域或对室内土柱的一维模拟。造成这一局限的主要原因在于，Hydrus-1D 软件为免费软件，可从官网下载使用；而功能更强大、适用场景更广泛的 Hydrus-2D 软件不仅需要付费，且不提供源代码。

综上所述，有限元法求解二维 Richards 方程的代码难以获取，即便有 AI 工具辅助，数理基础薄弱的研究人员通过自学掌握有限元法编程、实现二维 Richards 方程求解，仍需耗费大量精力。此外，我国土壤物理学研究基础薄弱，也是导致科研原创性不足的另一重要原因<sup>[1]</sup>。有限元法求解二维 Richards 方程是土壤物理过程数值模拟的基础知识，数理基础薄弱的研究人员应在尽可能短的时间内掌握，以便为后续开展更为复杂的土壤物理过程数值模拟研究奠定基础。针对上述问题，本文详细介绍了基于有限元法求解二维 Richards 方程的编程思路及其实现代码，旨在为有需要的研究人员提供快速入门的参考资料，并为我国在土壤物理过程数值模拟方面取得突破起到积极作用。

## 1 二维 Richards 方程

假设土壤均质、各向同性，以土壤体积含水量 $\theta[L^3L^{-3}]$ 为因变量的二维 Richards 方程为( $z$  轴向下为正)：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = 0 \quad (1)$$

式中， $t[T]$ 为时间， $z[L]$ 为土壤深度， $x[L]$ 为水平距离， $K(\theta)[LT^{-1}]$ 为非饱和土壤导水率， $D(\theta)[L^2T^{-1}]$ 为土壤水扩散率。

通过设置初始条件、边界条件及土壤水力参数(导水率 $K(\theta)$ 、扩散率 $D(\theta)$ )，可将二维 Richards 方程运用于不同情景下的土壤水分运移模拟。本文以两类典型农业灌溉情景(地下管道渗灌和地表滴灌)为例，来验证本文提供的编程思路和配套代码的正确性。

### 1.1 案例 1：地下管道渗灌条件下非饱和土壤水二维流动

本案例采用张思聪等<sup>[9]</sup>文中的地下管道渗灌条件下非饱和土壤水二维流动数值模拟参数。该研究以轻壤土为研究对象，其模拟区域设定为田间渗灌对称流域：

初始条件：

$$\theta(x, z, 0) = \theta_0 \quad (2a)$$

式中， $\theta_0$ 为土壤初始含水量， $\theta_0 = 0.03$ 。

边界条件：

$$\theta(0, 0, t) = \theta_b, t \in [0, T] \quad (2b)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0, x \rightarrow \pm\infty \quad (2c)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0, z \rightarrow +\infty \quad (2d)$$

式中， $\theta_b$ 为供水边界含水率， $\theta_b = 0.41$ 。

采用的土壤水分扩散率曲线和非饱和导水率曲线为：

$$D(\theta) = 278.3 \left( \frac{\theta}{n} \right)^{8.05} \quad (3)$$

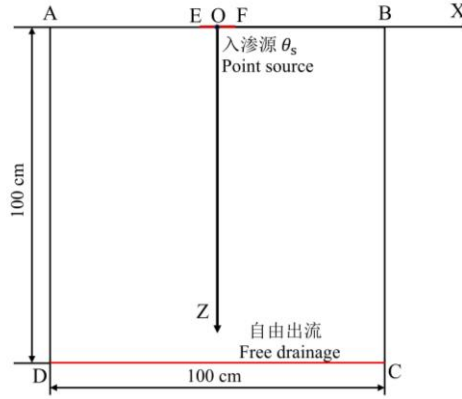
$$K(\theta) = 1.42 \left( \frac{\theta}{n} \right)^{10.24} \quad (4)$$

式中， $n$ 为土壤孔隙度， $n = 0.48$ 。

### 1.2 案例 2：地表滴灌条件下非饱和土壤水二维流动

本案例采用苏李君等<sup>[10]</sup>文中的地表滴灌条件下非饱和土壤水二维流动数值模拟参数。

该研究采用 HYDRUS 3D 有限元软件求解二维 Richards 方程，土壤水力特性采用 Brooks-Corey 模型进行描述，计算区域如图 1 所示：



注：A, B, C 和 D 为计算域边界；X 为水平轴；Z 为竖直角。Note: A, B, C and D are the boundaries of computational domain; X is horizontal axis; Z is vertical axis.

图 1 地表滴灌条件计算区域

Fig. 1 Calculation area under surface drip irrigation conditions

初始条件：

$$\theta(x, z, 0) = \theta_0 \quad (5a)$$

式中， $\theta_0 = 0.04$ ， $-50 \text{ cm} \leq x \leq 50 \text{ cm}$ ， $0 \text{ cm} \leq z \leq 100 \text{ cm}$ 。

边界条件：

入渗面 EF 边界：

$$\theta(x, z, t) = \theta_s \quad (x_0 \leq x \leq x_l, 0 \leq z \leq 1, t > 0) \quad (5b)$$

式中， $\theta_s$  为土壤饱和含水量， $\theta_s = 0.434$ ， $x_0 = -0.5 \text{ cm}$  为积水区域左边界 E 点坐标， $x_l = 0.5 \text{ cm}$  为积水区域右边界 F 点坐标。

CD 自由排水边界：

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5c)$$

AE、FB、AD、BC 零通量边界：

$$K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5d)$$

采用的土壤水分扩散率曲线和非饱和导水率曲线为：

$$D(\theta) = 0.022 \left( \frac{\theta - 0.027}{0.407} \right)^{\frac{266}{22}} \quad (6)$$

$$K(\theta) = \frac{11148}{4070} \left( \frac{\theta - 0.027}{0.407} \right)^{\frac{144}{22}} \quad (7)$$

## 2 二维理查兹方程有限元法求解编程思路

### 2.1 计算区域的离散

采用《计算流体力学有限元方法及其编程详解》<sup>[11]</sup>第 3 章四边形网格离散方法，具体离散过程详见本文配套代码。

### 2.2 插值函数和权函数

对于任意一个矩形网格，四个节点的坐标分别为 $(x_1^e, z_1^e)$ 、 $(x_2^e, z_2^e)$ 、 $(x_3^e, z_3^e)$ 、 $(x_4^e, z_4^e)$ ，设定其插值函数的待定形式为：

$$\Psi_i = a_i x z + b_i x + c_i z + d_i \quad (\text{其中 } i=1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

根据插值函数的性质，有(以 $\Psi_1$ 为例)：

$$\begin{pmatrix} x_1^e z_1^e & x_1^e & z_1^e & 1 \\ x_2^e z_2^e & x_2^e & z_2^e & 1 \\ x_3^e z_3^e & x_3^e & z_3^e & 1 \\ x_4^e z_4^e & x_4^e & z_4^e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

由于网格单元为矩形，有 $x_1^e = x_4^e$ 、 $x_2^e = x_3^e$ 、 $z_1^e = z_2^e$ 、 $z_3^e = z_4^e$ ，且 $x_2^e - x_1^e = L_1$ 、 $z_3^e - z_2^e = L_2$ ，其中 $L_1$ 和 $L_2$ 为单元网格边长。

求解得： $a_1 = \frac{1}{L_1 \cdot L_2}$ ， $b_1 = -\frac{z_3^e}{L_1 \cdot L_2}$ ， $c_1 = -\frac{x_2^e}{L_1 \cdot L_2}$ ， $d_1 = \frac{x_2^e z_2^e}{L_1 \cdot L_2}$ 。为了便于后续使用 Gaussian

积分进行计算，将 $\Psi_i$ 转换至中心为原点，边长为 2 的正方形上。则有： $\frac{x-x_1^e}{x_2^e-x_1^e} = \frac{\xi+1}{2}$ ， $\frac{z-z_1^e}{z_4^e-z_1^e} =$

$\frac{\eta+1}{2}$ ，将其代入插值函数表达式中，得：

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (10a)$$

同理得：

$$\Phi_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \quad (10b)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (10c)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (10d)$$

式(10)列出的单元插值函数为标准四边形单元插值函数的无量纲形式，式中 $-1 \leq \xi \leq 1$ ， $-1 \leq \eta \leq 1$ 。其中插值函数对坐标 $\xi$ 、 $\eta$ 的导数为：

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} (1 - \eta) \quad (11a)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 - \eta) \quad (11b)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta) \quad (11c)$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} (1 + \eta) \quad (11d)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} (1 - \xi) \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} (1 + \xi) \quad (12b)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) \quad (12c)$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 - \xi) \quad (12d)$$

二维 Richards 方程在离散后的每一个单元上对应的插值函数 $\phi(\xi, \eta)$ 为：

$$\Phi = (\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4)^T \quad (13)$$

单元内任意一点函数值的表达式为：

$$\theta = \Phi^T \theta^e \quad (14)$$

### 2.3 加权余量方程的建立

伽辽金有限元方法中权函数等于插值函数。权函数与式(1)相乘，并在全部积分域 $\Omega$ 内积分，得：

$$\iint_{\Omega} \Psi \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right\} dx dz = 0 \quad (15)$$

式(15)简化得：

$$\iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dz - \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz - \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz = 0 \quad (16)$$

令 $I = \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz$ 、 $II = \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz$ 。首先使用分部积分进行简化：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz \end{aligned} \quad (17)$$

继而采用 Green 公式对式(17)作如下变换：

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz \\ &= \oint_{\Gamma} \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx dz \end{aligned} \quad (18)$$

同理，对II进行简化得：

$$\begin{aligned} II &= \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right] dx dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz \end{aligned} \quad (19)$$

采用 Green 公式对式(19)作如下变换：

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \right] dx dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz \\ &= \oint_{\Gamma} \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dz \end{aligned} \quad (20)$$

将式(18)和式(20)代入式(16)可得：

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dz + \oint_{\Gamma} \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} dz - \oint_{\Gamma} \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx \\ &= \oint_{\Gamma} \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} dz - \oint_{\Gamma} \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx \end{aligned} \quad (21)$$

### 2.4 单元有限元方程的建立

建立单元方程时，需将式(21)的积分区域变换为单元区域。若存在第二类边界条件，单元方程的建立需区分内部单元与边界单元；若仅存在第一类边界条件，则任一单元均不受第二类边界条件的影响，可按内部单元的方法进行推导。

**2.4.1 内部单元** 内部单元为所有边都不处在第二类边界条件上的单元。内部单元的单元方程中，式(21)等式右边项为零，并将式(14)代入式(21)构建单元方程：

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^e} \phi \phi^T \frac{\partial \theta_l^e}{\partial t} dx dz + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ D(\phi^T \theta_l^e) \frac{\partial \phi^T \theta_l^e}{\partial x} \right] dx dz \\ & + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ K(\phi^T \theta_l^e) + D(\phi^T \theta_l^e) \frac{\partial \phi^T \theta_l^e}{\partial z} \right] dx dz = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)简化得:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^e} \phi \phi^T dx dz \frac{\partial \theta_l^e}{\partial t} + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ D(\phi^T \theta_l^e) \frac{\partial \phi^T \theta_l^e}{\partial x} \right] dx dz \\ & + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ K(\phi^T \theta_l^e) + D(\phi^T \theta_l^e) \frac{\partial \phi^T \theta_l^e}{\partial z} \right] dx dz = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

采用后向差分法对式(23)中 $\frac{\partial \theta_l^e}{\partial t}$ 进行处理, 得:

$$\frac{\partial \theta_l^e}{\partial t} = \frac{\theta_l^{e(i)} - \theta_l^{e(i-1)}}{\Delta t} \quad (24)$$

式中,  $\theta_l^{e(i)}$ 为第 $e$ 个单元内第 $l$ 个节点, 在第 $i$ 个时间步的值;  $\theta_l^{e(i-1)}$ 为第 $e$ 个单元内第 $l$ 个节点, 在第 $i-1$ 个时间步的值。

将式(24)代入式(23), 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_l^{e(i)} - \theta_l^{e(i-1)}}{\Delta t} \iint_{\Omega^e} \phi \phi^T dx dz + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_l^{e(i)}}{\partial x} \right] dx dz \\ & + \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ K(\phi^T \theta_l^{e(i)}) + D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \frac{\partial \phi^T \theta_l^{e(i)}}{\partial z} \right] dx dz = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

采用 Gaussian 数值积分法求解式(25)中的积分项。利用 Jacobian 矩阵可将 $[x, z]$ 变换到 $[\xi, \eta]$ :

$$\iint G(x, z) dx dz = \iint G^*(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (26)$$

式(23)中 $G(x, z)$ 为任意函数,  $J$ 为 Jacobian 矩阵, 对于二维问题, 其具体形式如下:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (27)$$

根据导数关系得:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial x} = \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (28a)$$

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial z} = \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (28b)$$

对式(25)进行积分变换并将式(28)代入, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_l^{e(i)} - \theta_l^{e(i-1)}}{\Delta t} \iint_{\Omega^e} \phi \phi^T |J| d\xi d\eta + \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left[ D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| d\xi d\eta \\ & + \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \left[ K(\phi^T \theta_l^{e(i)}) + D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

利用 Gaussian 数值积分公式, 式(29)可变换为:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_l^{e(i)} - \theta_l^{e(i-1)}}{\Delta t} \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_{\sigma} \omega_{\tau} \phi \phi^T |J| + \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_{\sigma} \omega_{\tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_{\sigma}} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{\tau}} \frac{\partial \eta_{\tau}}{\partial x} \right) \cdot \\ & \left[ D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_{\sigma}} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_{\tau}} \frac{\partial \eta_{\tau}}{\partial x} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| + \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_{\sigma} \omega_{\tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_{\sigma}} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{\tau}} \frac{\partial \eta_{\tau}}{\partial z} \right) \cdot \\ & \left[ K(\phi^T \theta_l^{e(i)}) + D(\phi^T \theta_l^{e(i)}) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_{\sigma}} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial z} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_{\tau}} \frac{\partial \eta_{\tau}}{\partial z} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

式中， $\omega_\sigma$ 和 $\omega_\tau$ 为第 $\sigma$ 或 $\tau$ 个积分点对应的积分权重， $\xi_\sigma$ 和 $\eta_\tau$ 为第 $\sigma$ 或 $\tau$ 个积分点在单元的局部坐标， $\sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \phi \phi^T |J|$ 为质量矩阵，记为 $M_e$ ，即第 $e$ 个单元的质量矩阵，则式(30)简化为：

$$\begin{aligned} M_e \theta_l^{e(i)} - M_e \theta_l^{e(i-1)} + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) D \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) \cdot \\ \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \theta_l^{e(i)} |J| + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \cdot \\ \left[ K \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) + D \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

**2.4.2 边界单元** 边界单元是指单元中至少有一条边处于第二类边界条件上的单元，相较于内部单元，边界单元的推导需考虑式(21)的右边项，将该等式右项记为 $B_e$ ，为第 $e$ 个单元的边界荷载向量：

$$B_e = \oint_{\Gamma} \Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} dz - \oint_{\Gamma} \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx \quad (32)$$

对于边界单元的任一边界边，定义单位外法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$ ，其中 $n_x = \cos \alpha$ ， $n_z = \sin \alpha$ ， $\alpha$ 为外法向量与 $x$ 轴正方向的夹角。

由几何关系可得： $dz = -n_x d\Gamma$ ， $dx = n_z d\Gamma$ ，将其代入式(32)可得：

$$\begin{aligned} B_e = \oint_{\Gamma} -\Psi D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x d\Gamma - \oint_{\Gamma} \Psi \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] n_z d\Gamma \\ = \oint_{\Gamma} -\Psi \left\{ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] n_z \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (33)$$

其中定义水平方向通量 $q_x = D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$ ，竖直方向通量 $q_z = \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]$ ，代入式(33)：

$$B_e = \oint_{\Gamma} -\Psi \{q_x n_x + q_z n_z\} d\Gamma \quad (34)$$

在计算过程中，单位时间、单位边界长度上，垂直边界向外流出的水量 $q_n = q_x n_x + q_z n_z$ ，对于处于第二类边界条件的边界边，通过 Jacobian 转换将其映射至无量纲区域 $s \in [-1, 1]$ ，得：

$$B_e = \oint_{\Gamma} -\Psi q_n d\Gamma = -q_n \int_{-1}^1 \Psi |J| ds \quad (35)$$

其中插值函数 $\Psi = \left( \frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2} \right)$ 。

结合内部单元式(21)推导结果，将边界单元的 $B_e$ 项代入，最终得到边界单元的控制方程：

$$\begin{aligned} M_e \theta_l^{e(i)} - M_e \theta_l^{e(i-1)} + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) D \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) \cdot \\ \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \theta_l^{e(i)} |J| + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \cdot \\ \left[ K \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) + D \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_l^{e(i)} \right] |J| = -\Delta t q_n \int_{-1}^1 \Psi |J| ds \end{aligned} \quad (36)$$

## 2.5 Newton-Raphson 法求解方程

式(36)为非线性代数式，故可利用 Newton-Raphson 法求解，将式(36)中所有项移至左侧令其等于 $R(\theta)$ ，即：

$$R(\theta) = M_e \theta_l^{e(i)} - M_e \theta_l^{e(i-1)} + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) D \left( \phi^T \theta_l^{e(i)} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x}\right) \theta_I^{e(i)} |J| + \Delta t \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \omega_i \omega_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z}\right) \cdot$$

$$\left[ K \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_I^{e(i)} \right] |J| + \Delta t q_n \int_{-1}^1 \Psi |J| ds \quad (37)$$

对式(37)中的当前时刻值求导，得：

$$R'(\theta) = M_e + \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \cdot$$

$$\left[ D' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \theta_I^{e(i)} + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \right] |J|$$

$$+ \Delta t \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \left[ K' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T + D' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_I^{e(i)} + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \right] |J| \quad (38)$$

令式(37)中  $\sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \theta_I^{e(i)} |J| +$   
 $\sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \left[ K \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_I^{e(i)} \right] |J| =$   
 $F_e$ ，则式(37)可简化为：

$$R(\theta) = M_e \theta_I^{e(i)} - M_e \theta_I^{e(i-1)} + \Delta t \cdot F_e - \Delta t \cdot B_e \quad (39)$$

令式(38)中  $\sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \left[ D' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \right. \right.$   
 $\left. \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \theta_I^{e(i)} + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial x} \right) \right] |J| + \sum_{\sigma=1}^6 \sum_{\tau=1}^6 \omega_\sigma \omega_\tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \right.$   
 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \left[ K' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T + D' \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \Phi^T \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \theta_I^{e(i)} + D \left( \Phi^T \theta_I^{e(i)} \right) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial z} + \right.$   
 $\left. \frac{\partial \Phi^T}{\partial \eta_\tau} \frac{\partial \eta_\tau}{\partial z} \right) \right] |J| = T_e$ ，则式(38)可简化为：

$$R'(\theta) = M_e + \Delta t \cdot T_e \quad (40)$$

由 Newton-Raphson 法可得：

$$\Delta \theta = - \frac{R(\theta)}{R'(\theta)} \quad (41)$$

将  $R(\theta)$  和  $R'(\theta)$  代入式(41)并简化，得：

$$M_e \cdot \Delta \theta + \Delta t \cdot T_e \cdot \Delta \theta + M_e \theta_I^{e(i)} - M_e \theta_I^{e(i-1)} = \Delta t \cdot F_e - \Delta t \cdot B_e \quad (42)$$

## 2.6 总体方程的组合

上述方程的组合方法可详见《计算流体力学有限元方法及其编程详解》<sup>[11]</sup>一书及本文配套代码。

## 2.7 代入边界条件求解

使用对角线归一代入法代入第一类边界条件。式(42)经过组合后表达式为：

$$(M + \Delta t \cdot T) \cdot \Delta \theta = - \left( M \theta_I^{(i)} - M \theta_I^{(i-1)} - \Delta t \cdot F + \Delta t \cdot B \right) \quad (43)$$

对式(43)进行矩阵计算，将其记为  $K \cdot \Delta \theta = b$ ，其中  $K = M + \Delta t \cdot T$ 、 $b = - \left( M \theta_I^{(i)} - M \theta_I^{(i-1)} - \Delta t \cdot F + \Delta t \cdot B \right)$ 。

组合后的二维理查兹方程中的 $K$ 为 $N \times N$ 方阵，其中 $N$ 为区域离散节点数。为便于说明，下文采用具有3个自变量 $\Delta U_1$ 、 $\Delta U_2$ 和 $\Delta U_3$ 的方程组阐释对角线归一代入法的原理。

$$\begin{cases} K_{11} \cdot \Delta U_1 + K_{12} \cdot \Delta U_2 + K_{13} \cdot \Delta U_3 = b_1 \\ K_{21} \cdot \Delta U_1 + K_{22} \cdot \Delta U_2 + K_{23} \cdot \Delta U_3 = b_2 \\ K_{31} \cdot \Delta U_1 + K_{32} \cdot \Delta U_2 + K_{33} \cdot \Delta U_3 = b_3 \end{cases} \quad (44)$$

式(44)转换为矩阵求解形式，其中 $\Delta U_1 = U_1$ ， $U_1$ 为已知值，得：

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (45)$$

第一步，对式(45)进行变形，拆分矩阵，并将已知量移至等式右侧，得

$$\begin{pmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{pmatrix} \Delta U_1 \quad (46)$$

令 $b' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{pmatrix} \Delta U_1$ ，则式(46)为：

$$K_{12} \cdot \Delta U_2 + K_{13} \cdot \Delta U_3 = b_1' \quad (47a)$$

$$K_{22} \cdot \Delta U_2 + K_{23} \cdot \Delta U_3 = b_2' \quad (47b)$$

$$K_{32} \cdot \Delta U_2 + K_{33} \cdot \Delta U_3 = b_3' \quad (47c)$$

未知的 $\Delta U_2$ 和 $\Delta U_3$ 只需两个方程即可求解，可选择舍去式(47a)。

第二步，将矩阵 $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$ 中与 $\Delta U_1$ 相乘的一列所有元素重置为零，即 $K_{11} = K_{21} =$

$K_{31} = 0$ 。

第三步，据第一步舍去式(47a)的选择，将矩阵 $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$ 中第一行元素重置为零，

即 $K_{11} = K_{12} = K_{13} = 0$ 。

第四步，将上述步骤中重置为零的列和行相交位置的元素置为1，即 $K_{11} = 1$ 。

第五步，将矩阵 $b'$ 中与 $\Delta U_1$ 相对应的元素 $b_1'$ 重置为已知值 $U_1$ ，即 $b_1' = U_1$ 。

经过上面五个步骤，式(45)转换成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} \quad (48)$$

式(48)以方程组形式表示为：

$$\begin{cases} \Delta U_1 = U_1 \\ K_{22} \cdot \Delta U_2 + K_{23} \cdot \Delta U_3 = b_2' \\ K_{32} \cdot \Delta U_2 + K_{33} \cdot \Delta U_3 = b_3' \end{cases} \quad (49)$$

由此，可以求出未知的 $\Delta U_2$ 和 $\Delta U_3$ 。在上述五个步骤中，第一步将已知量移至右侧，使得只需两个方程即可求解剩下的未知量，消除了 $U_1$ 对其他变量的影响；第二步的目的是将除选择的那一行之外的方程组中所有包含 $\Delta U_1$ 的项消除；第三、四、五步确定已知值 $\Delta U_1 = U_1$ 。通过上述步骤，对角线归一代入法强制已知节点满足约束条件 $\Delta U_1 = U_1$ ，同时保证矩阵可逆(如式(48)所示)，为后续计算奠定基础。

式(43)中 $\Delta \theta$ 的值的求解思路与上述 $3 \times 3$ 方阵求解思路类似，具体求解步骤详见本文配

套代码。由 Newton-Raphson 法可得：

$$\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)} + \Delta\theta \quad (50)$$

根据式(50)从初始条件开始计算，即可求得计算区域任一时刻土壤剖面中的土壤体积含水量。

### 3 模型实现

基于前述编程思路，可完成地下管道渗灌与地表滴灌场景下二维 Richards 方程的有限元数值求解模型开发。两个案例的数值模拟流程图详见图 2。地下管道渗灌案例采用张思聪等<sup>[9]</sup>的试验数据，该案例为第一类边界条件下的二维 Richards 方程有限元数值求解，式(21)右侧项取值为 0，仅通过内部单元即可完成方程推导，实现地下管道渗灌条件下土壤水分运动过程的数值模拟。模拟参数设置为：时间步长 $\Delta t=0.1$  min，空间步长 $\Delta x=2$  cm、 $\Delta z=2$  cm，模拟总时长为 240 min，全部计算基于 MATLAB 平台编程实现。选取 7、50、90、120、180 和 240 min 六个关键时刻的实测数据与数值计算结果进行对比验证（图 3），二者拟合度良好，平均纳什效率系数（NSE）达到 0.8377，验证了本文提出的编程思路与代码的可靠性。

地表滴灌案例参考苏李君等<sup>[10]</sup>的研究，针对第二类边界条件开展地表滴灌土壤水分运动模拟。式(21)单元有限元方程构建时，需区分内部单元与边界单元分别推导。模拟过程中，时间步长根据迭代稳定性在 0.05~0.5 min 范围内自适应调整，水平与垂直空间步长均为 $\Delta x=1$  cm、 $\Delta z=1$  cm，总模拟时长 500 min，计算程序同样基于 MATLAB 编写。将本文模拟结果与苏李君等<sup>[10]</sup>数值模拟试验获取的土壤水分二维运移湿润锋数据对比，选取 50、100、200、500 min 四个时刻的数据进行校验(图 4)，模型拟合效果优良，平均纳什效率系数(NSE)为 0.8448，证实本文构建的有限元数值模型能够精准、可靠地模拟地表滴灌条件下的土壤水分二维运移过程。

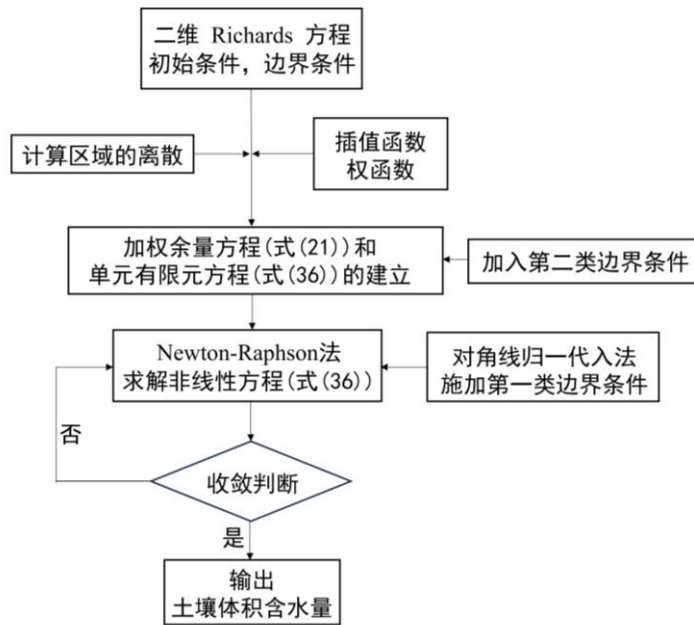


图 2 土壤水分运动二维 Richards 方程数值求解流程图

Fig. 2 Flow chart of numerical solution for the two-dimensional Richards equation in soil water movement

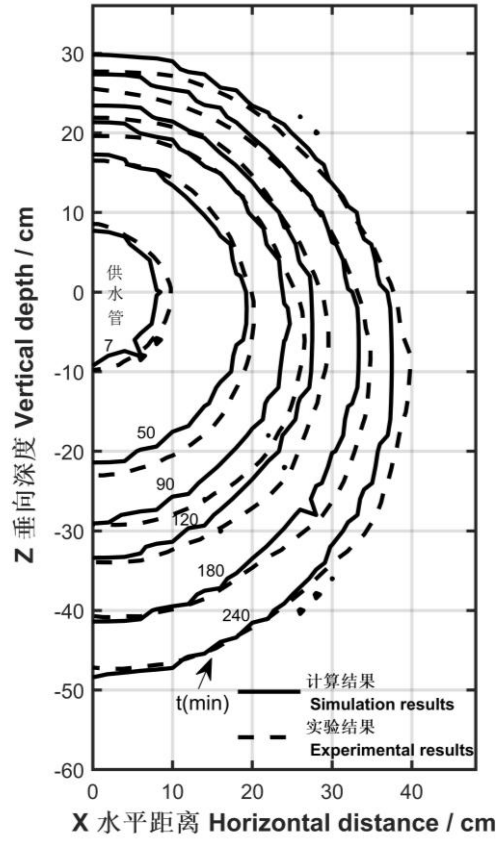


图 3 地下管道渗灌条件下二维土壤水分运动湿润锋面轮廓

Fig. 3 Wetting front profile of two-dimensional soil water movement under subsurface drip irrigation

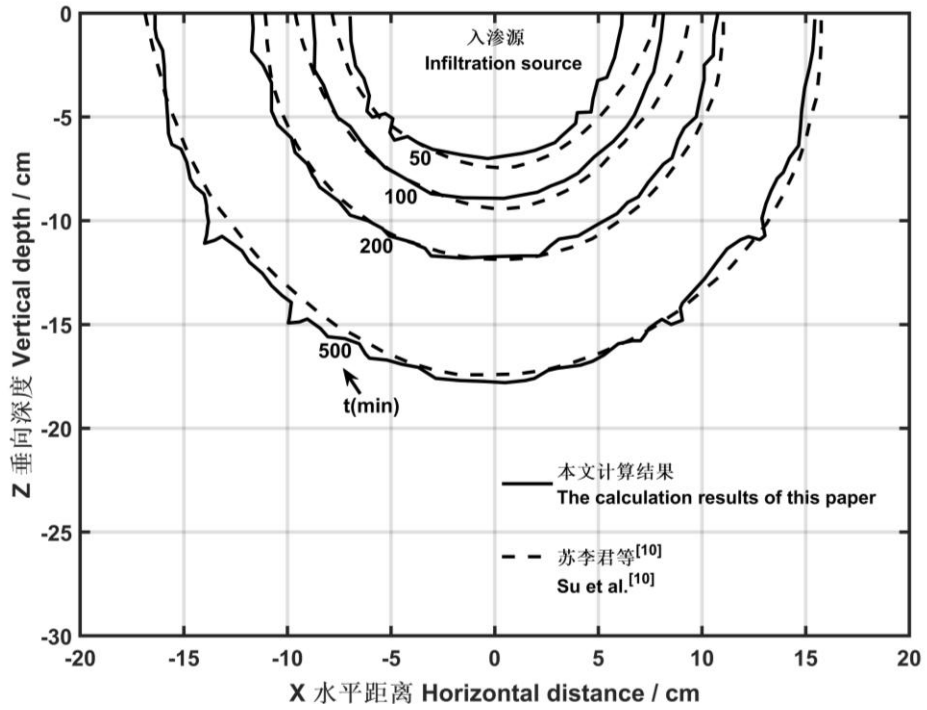


图 4 地表滴灌条件下二维土壤水分运动湿润锋面轮廓

Fig. 4 Wetting front profile of two-dimensional soil water movement under surface drip irrigation

## 4 结 论

非饱和土壤水二维流动有限元法求解,其整体编程思路与一维有限元法基本一致<sup>[12]</sup>,核心均为通过分步推导将非线性偏微分方程转化为非线性代数方程,再开展数值求解与程序实现。但两者在细节处理上存在显著差异,二维问题在计算区域离散化、插值函数和权函数构造、加权余量方程建立及边界条件代入等关键环节的复杂度更高。

二维 Richards 方程有限元求解思路具体如下:首先,将权函数与 Richards 方程相乘并在求解域内积分,推导得到式(15),该式与原控制方程式(1)等价;随后,通过分部积分和 Green 公式对式(15)进行降阶处理,得到式(21),为第二类边界条件的代入提供了理论基础。在考虑第二类边界条件时,需分别构建计算域内部单元与边界单元的有限元方程:对于内部单元,将插值函数代入式(21)完成方程离散化,得到式(23),对式(23)中体积含水量的时间导数项采用后向差分法处理,再通过 Jacobian 矩阵将积分区域转换为以原点为中心、边长为 2 的标准正方形域,为 Gaussian 数值积分的应用创造条件;边界单元推导得到的式(32)是引入第二类边界条件的核心表达式,经上述步骤,最终将其转化为非线性代数方程式(36)。若仅考虑第一类边界条件,可直接通过内部单元有限元方程构建非线性方程组。通过对角线归一代入法施加第一类边界条件,最终形成集成所有单元信息与边界条件的整体矩阵方程,最终采用 Newton-Raphson 法基于式(50),求解出计算区域内任意时刻的土壤体积含水量分布。本文所构建的有限元法求解框架虽针对二维 Richards 方程建立,但其空间离散、非线性迭代求解及边界条件施加等核心算法具有良好的普适性,可拓展应用于土壤溶质运移或土壤温度和热运移等其他土壤物理过程偏微分方程的数值求解。

依据上述编程思路编写的数值程序,已通过参考数据验证,计算结果具有较高可靠性。当前已发表的有限元法求解二维 Richards 方程相关文献,多由数学专业研究者撰写;尽管在 AI 时代,此类理论性较强的文献对数理基础薄弱的学者而言,理解难度有所降低,但在二维 Richards 方程线性化处理、第一类与第二类边界条件代入等关键实现步骤上,现有资料描述仍不够详尽,导致非数学背景研究者难以快速掌握相关方法。同时,配套源码的稀缺性进一步提升了学习与实践的门槛。为此,本文系统梳理并提出了详尽的二维 Richards 方程有限元法编程思路,并提供配套可运行程序,旨在帮助有需要的研究者快速掌握有限元法求解二维非饱和土壤水流动的核心技术,以期为解决我国土壤物理过程数值模拟难以取得突破的问题起到一些积极作用。本文展示的两个案例的 MATLAB 代码可从如下网址下载以供参考:<https://www.scidb.cn/en/detail?dataSetId=d91ae2094d9045098370cb6deebd95fb>。

### 参考文献 (References)

- [1] Peng X H, Wang Y Q, Jia X X, et al. Some key research fields of Chinese soil physics in the new era: Progresses and perspectives[J]. Acta Pedologica Sinica, 2020, 57(5): 1071-1087. [彭新华, 王云强, 贾小旭, 等. 新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望[J]. 土壤学报, 2020, 57(5): 1071-1087.]
- [2] Zhao M L. Numerical simulation for 2-D water flow and solute transport by using the finite element method [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2006. [赵梦玲. 二维水分运动及溶质运移的有限元数值模拟[D]. 西安: 西安理工大学, 2006.]
- [3] Di Z H, Luo Z D, Xie Z H, et al. A reduced finite element scheme based on POD two-dimensional unsaturated soil water flow equation[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2011, 35(3): 142-149. [狄振华, 罗振东, 谢正辉, 等. 二维非饱和土壤水流方程基于 POD 方法的有限元格式[J]. 北京交通大学学报, 2011, 35(3): 142-149.]
- [4] Xia Y Y. Direct discontinuous finite element method for solving Richards equation[D]. Nanjing: Nanjing University, 2012. [夏映阳. 求解 Richards 方程的直接间断有限元方法[D]. 南京: 南京大学, 2012.]
- [5] Zhao C X. The analysis and the computation for Richards' equation during the infiltration process in saturated and unsaturated soil [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2016. [赵晨霞. 饱和-非饱和土壤渗流过程中 Richards 方

程的分析与计算[D]. 兰州: 兰州大学, 2016.]

[6] Hou Z Z. Numerical calculation for Richards equation with linearized finite element methods[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2022. [侯真真. Richards 方程的线性化有限元计算[D]. 大连: 大连理工大学, 2022.]

[7] Simunek J, Saito H, Sakai M, et al. The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media[M], version 4.17, University of California Riverside. Riverside, California, USA, 2013.

[8] Gao Z G, Zhong R L, Yang S, et al. Recent progresses in research and applications of Hydrus model in China[J]. Soils, 2022, 54(2): 219-231. [高震国, 钟瑞林, 杨帅, 等. Hydrus 模型在中国的最新研究与应用进展[J]. 土壤, 2022, 54(2): 219-231.]

[9] Zhang S C, Hui S B, Lei Z D, et al. Study on two-dimensional flow of water in unsaturated soil under subsurface irrigation[J]. Acta Pedologica Sinica, 1985, 22(3): 209-222. [张思聪, 惠士博, 雷志栋, 等. 渗灌的非饱和土壤水二维流动的探讨[J]. 土壤学报, 1985, 22(3): 209-222.]

[10] Su L J, Lin S D, Wang Q J, et al. Influence of soil hydraulic parameters on soil wetting pattern shape of point source infiltration[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(1): 264-274. [苏李君, 蔺树栋, 王全九, 等. 土壤水力参数对点源入渗湿润体形状的影响[J]. 农业机械学报, 2020, 51(1): 264-274.]

[11] Bi C. Finite element method of computational fluid dynamics and its detailed programming solution[M]. Beijing: China Machine Press, 2013. [毕超. 计算流体力学有限元方法及其编程详解[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.]

[12] Zhang Q Q, Li X, Wang Z F. A programming idea for solving one-dimensional unsaturated infiltration equation by finite element method[J]. Acta Pedologica Sinica, 2025, 62(6): 1902-1909. [张晴晴, 李想, 王忠富. 非饱和土壤水一维流动有限元法求解编程思路[J]. 土壤学报, 2025, 62(6): 1902-1909.]

(责任编辑: 檀满枝)