植物根系吸收土壤水分的数学模型

邵明安 杨文治 李玉山
（中国科学院西北水土保持研究所）

摘 要

本文根据植物根系吸水的物理过程，提出了一个能反映根系吸水机理的宏观数学模型，模拟结果与试验之间进行比较的情况非常令人满意，因而本模型具有较高的预报能力。

在描述 SPAC 中水分运输的过程中，定量描述了相关的水势分量，同时还探究了这一过程中能量转换和消耗的特征。

根系吸水速率与有效根密度的关系甚为密切。有效根密度的物理基础是单位土体中毛根的长度。因此，可采取优化的技术措施来加强根系发育，尤其是增加毛根的长度和数量，从而可提高植物的水分利用效率和创造高额的生物产量和经济产量。

当代研究田间土壤水分循环是以土壤—植物—大气连续统一体（简称 SPAC）为基础的。SPAC 中一个重要的子系统就是土壤—根系系统。土—根系统中水分运行主要取决于植物根系吸收土壤水。所以，探讨和研究土—根系统以至整个 SPAC 中水分传输的机理必须首先解决植物根系如何吸收土壤水分的问题。

一、研 究 背 景

定量描述植物根系吸收土壤水分的数学模型有两种[1]：宏观模型和微观模型。

宏观模型是在 Darcy-Richards 方程右边加上一个吸收项而得到的。因而，提出和改进宏观模型的实质在于用不同的吸收项（吸水函数）来刻画根系吸水。自 Gardner[6] 提出第一个吸水函数以来，很多研究者围绕这一问题作了大量工作。其中尤以 Molz 和 Remson[7]、Nimah 和 Hanks[8]、Hillel[9]、Feddes[10]、Herkelrath[11] 等人所提出的吸水函数具有较广泛的代表性和较重要的参考价值。特别是 Molz[12] 1981 年提出的吸水函数。尽管这些模式各有所长，但仍存在着不少限制。多数模式共同的弱点是：根系吸水速率的上下限没有明确规定；没有对影响根系吸水的因素予以较全面的定量考虑；Molz 等人提出用有效根密度描述根系吸水，虽能较好地预报土—根系统中的水分动态，但有效根密度的物理基础尚不清楚，这些问题正是本文所要着重探讨的。

二、试 验 方 法

1.人工气候箱法 将直径 20 厘米、高 100 厘米、壁上有测湿孔的人工土柱放在气候箱（SS-400A 型）内，箱内温度控制在 18±1℃，相对湿度 60±5%，光照强度为 0.5 千瓦/米²。供试土壤为武功重壤土，作物为冬小麦。初始湿度为田间持水量，试验过程中不给水。设有蒸散、蒸腾（蛭石覆盖）、物理蒸

发三个处理，各两次重复。蒸散、蒸腾、蒸发用称重法求得。土壤含水量用烘干法测定。用小液流法测定植物水势。根密度用冲洗量测法获得，根半径用排水法求得。大气水势由箱内小气候测定资料计算。

2.土壤水分基本运动参数的获取方法 (1) 土壤水分特征曲线 $\psi_m(\theta)$：通过对测定 $\psi_m(\theta)$ 常见方法的定量研究[2]，取恒温条件下(18℃)压力膜测定的 $\psi_m(\theta)$ 用于模型中。(2) 土壤导水参数 $K(\theta)$ 和 $D(\theta)$：当土壤容积含水量 $\theta>0.28$ 时，用水平土柱法测 $D(\theta)$，由 $\psi_m(\theta)$ 推算 $K(\theta)$。当小于 0.28 时，用作者提出的方法[3]。研究表明：这两种方法其准确程度高，最佳适用范围能互相插补延长[4]。

三、数学模型

(一) 数学模型的建立

在不计温度、溶质、滞后效应的情况下，有根系吸收的土壤水分一维垂直流动方程为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]-\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}-S \tag{1}$$

式中 θ 为容积温度，t 为时间，z 表深度，$K(\theta)$、$D(\theta)$ 为导水率和扩散系数。S 为根系吸收项，代表单位时间内根系从单位土体中吸收的水量。

原则上，S 是土壤性质、植物因素和大气条件的复杂函数，但终究可看成时、空的函数，即 $S=S(z,t)$，本文在分析根系吸水的机理的基础上，吸取了前人工作的合理成分，提出的吸水函数如下：

$$S(z,t)=\frac{T\lambda L_v^{\frac{1}{n}}(\psi_s-\psi_z)/R_A}{\int_0^v \lambda L_v^{\frac{1}{n}}(\psi_s-\psi_z)/R_A dz} \tag{2}$$

式中：T 为蒸腾速率，L_v 是根系密度——单位土体的根长，ψ_s 为土水势，ψ_z 为根木质部水势，R_A 是根系吸水过程中所遇到的阻力之和。v 表根区深度，n 为土壤质地因子，武功重壤土为 2。这些参数多数是时、空的函数。

λ 为土壤水分限制因子，其表达式如下：

$$\begin{aligned}
&\lambda(\theta)=0 && 0\leqslant\theta\leqslant\theta_d\\
&\lambda(\theta)=\frac{\theta^2-\theta_d\theta}{\theta_f(\theta_f-\theta_d)} && \theta_d<\theta<\theta_f\\
&\lambda(\theta)=1 && \theta\geqslant\theta_f
\end{aligned} \tag{3}$$

式中的 θ_d 为植物受旱死亡时的土壤湿度，θ_f 为田间持水量。武功重壤土分别为 0.08 和 0.34 (厘米^3·厘米$^{-3}$)。

吸水函数中加进这一 λ 因子，则吸水速度有了明确的界限。当土壤湿度接近 θ_f 时，土壤水分不成为根系吸水的限制因素；当土壤湿度等于或小于 θ_d 时，吸水为零。

根密度 L_v 加上 $\frac{1}{n}$ 次方的实质是把吸水速率和毛根数量相联系了，从而修正了以往模式中吸水速率与根密度成正比的假定。因为与吸水速率密切相关的是吸水根系，而非

非所有根系都参加吸收活动。

水流阻力项，在 Hillel 模式基础上加进了土根接触阻力 R_{sr}。试验资料计算表明：当土壤湿度较低时，R_{sr} 是水流阻力的重要分量，其值远大于土壤阻力和根内木质部传导阻力。

(2) 式对根区深度积分等于作物的蒸腾速率，即蒸腾所消耗的水量来自整个根区根系所吸收的土壤水分。这既符合质量守恒定律也适用于蒸腾的实际情况。

从上面的分析可见：本文提出的模式，考虑了土壤(水分状况、能量水平、导水能力、质地等)、植物(吸水根系密度，根区深度)、大气(通过对蒸腾的影响来反映)等因素中的主

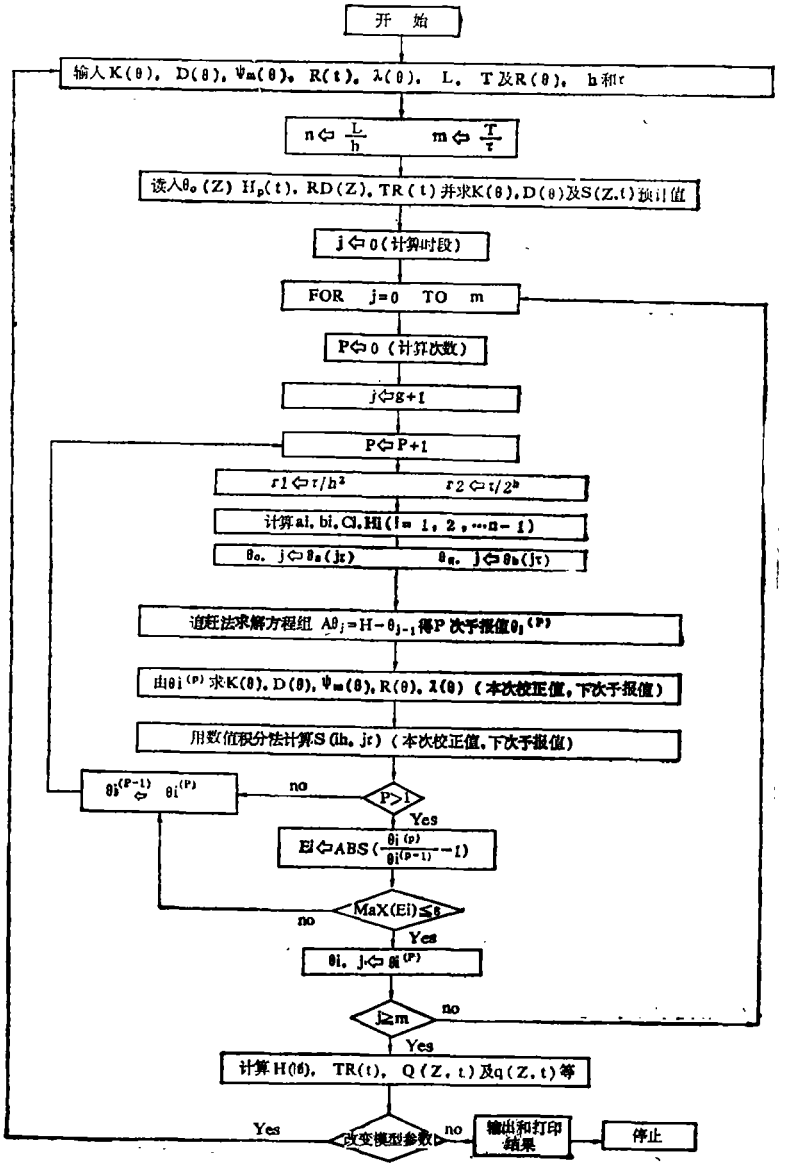


图 1　计算流程图

Fig. 1　Diagrammatic illustration for calculation

导因子的情况下建立的，因而从理论上具有一定的意义。

将（2）式代入（1）式，则得到本文所采用的植物根系吸收土壤水分的宏观数学模型如下：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]-\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}-S(z,t) \tag{4}$$

$$t>0,\ 0<z<L,\ \theta_d<\theta<\theta_f$$

式中 L 为土柱深度。初始条件由下式描述：

$$\theta(z,t=0)=\theta_0(z) \tag{5}$$

边界条件采用 Dirichlet 条件：

$$\theta(z=0,t)=\theta_a(t) \tag{6}$$

$$\theta(z=L,t)=\theta_b(t) \tag{7}$$

方程（4），加上（5）—（7）式，便可求解。

（二）数学模型的求解

由于（4）式是一个非线性、非齐次的抛物线方程，不能用解析的方法求其精确解，只能用数值方法求其规定精度下的近似解。本文采用隐式差分格式，用有限差分法求解。离散后的三对角型差分方程组用追赶法求解，非线性问题采用预报校正法处理，D 的取值采用三点式[5]。反映每一步数值计算的流程图如图 1 所示。

四、结果与讨论

（一）数学模型的可靠性

植物根系吸收土壤水分的宏观数学模型加上定解条件，用数值计算方法求解，便得到土壤水分的动态过程，把计算值（模拟值）与实测值在整个模拟期间作一比较（图 2），并求出计算值和实测值的偏离程度，从而来说明模型本身的可靠性。

计算值和实测值偏离度的定量分析是通过计算二者的离差值进行的。离差值意味着预报值与实测值的平均偏差。计算结果表明：整个预报过程中的平均偏差为 0.94%，即容积湿度的实测值与预报值相差 0.94%。这样的精度与土壤湿度测定过程中的允许误差接近，故本文提出的数学模型其可靠性是相当高的。

由上面的比较分析可以得出：本文所建立的数学模型其可靠性是满意的；因它是在较充分地分析了植物根系吸收土壤水分的物理过程及影响因素的基础上提出和建立的，故与以前的模式相比，它更能反映根系吸水的实际情况。

（二）植物根系吸收土壤水分的动态特征

1. 吸水过程中植物根系生长的动态过程　为了查明根系吸水速率与根系密度间的关系，找到与吸水速度有密切相关性的根系指标，在试验过程中测定了根系生长的动态过程。

（1）总根长随时间的变化规律：冬小麦分蘖末期到拔节后半月这一阶段，测定不同时间麦根总长度，结果如图 3 所示。

图 3 说明：冬小麦在这一期间其总根长是随时间而增加的。若给这一变化关系配上

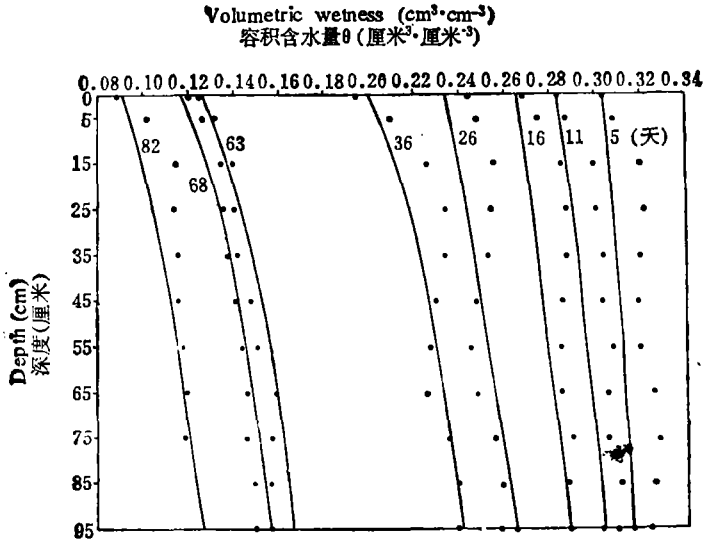


图 2　土壤含水量剖面计算值(线)与实测值(点)比较

Fig. 2　Comparison between computed values (lines) and actual measured values (dots) of soil moisture content in profile

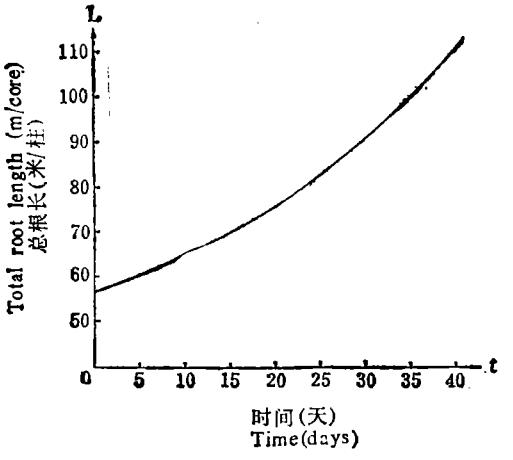


图 3　吸水过程中麦根总长度随时间的增长

Fig. 3　Increase of total root length of wheat with time in water absorption process

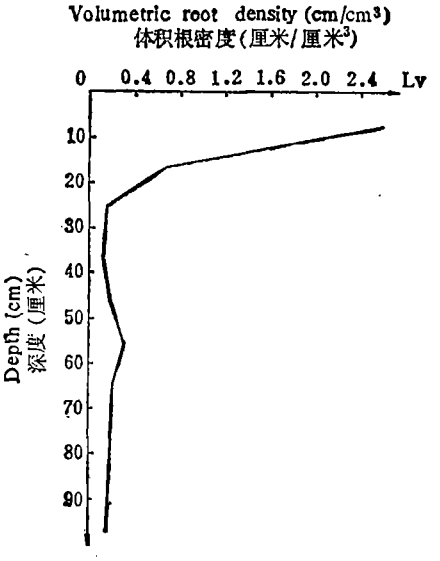


图 4　模拟土柱内试验末的体积根密度分布

Fig. 4　The volumetric root density distribution in modeling soil core at the end of the experiment

一个经验方程，其函数表达式为 $L = 56.86 + 0.79t^{1.13}$。根系总长的增长速率为 $\frac{dL}{dt} = 0.63t^{0.13}$ (米/天)，其值也是随时间增加的。

(2) 体积根密度的动态变化：体积根密度指单位土体中麦根的长度。其动态测定结果如表 1 所示。

表 1 体积根密度随时间和深度的变化

Table 1 Change of root density (cm/cm^3) in relation with depth and time

深度间隔 (cm) Depth range	试验开始后的时间(天) Time (days)				
	0	10	20	30	40
0—5	1.15	1.67	2.13	2.01	2.37
5—15	0.90	0.83	1.36	0.75	0.74
15—25	0.06	0.11	0.08	0.11	0.13
25—35	0.06	0.07	0.01*	0.07	0.12
35—45	0.05	0.05	0.03	0.16	0.17
45—55	0.05	0.04	0.03	0.15	0.31
55—65	0.02	0.02	0.04	0.12	0.21
65—75	0.03	0.02	0.05	0.13	0.17
75—85	0.03	0.03	0.03	0.09	0.16
85—95	0.01	0.02	0.03	0.09	0.12
平均值	0.236	0.286	0.379	0.368	0.450

* 系测定中的误差，体积根密度的单位为厘米根/厘米³土。

从表 1 可见：试验过程中，土柱内根系的平均密度随时间而增大；而每一时刻根系沿剖面的分布，其相对形状很相似。因此，可将根密度 $L_v(z, t)$ 写成时间分量 $R(t)$ 和深度分量 $L_v(z)$ 的乘积(即 $L_v(z, t) = L_v(z) \cdot R(t)$)，并用总根长随时间的变化规律来描述 $R(t)$。取试验末的根密度(图 4)作为 $L_v(z)$，这样可避免重复间的差异性。

从表 1 和图 4 的分析表明：体积根密度随深度急剧减小；总根长的 60% 以上分布在上层 25 厘米的土层中，25—65 厘米的土层内分布的根长约占总根长的 30%，下部土层中分布的根系不足总根长的 10%。值得注意的是：由于根系吸水只与吸水根系的数量密切相关，不能根据单位土体中的根长在剖面上的分布来推断根系的吸水剖面亦有类似分布，有关这个问题本文将在后面讨论。

由于根系阻力的计算中，需要用到根半径这个参数。因此，对小麦的根系半径进行了测定，其结果如表 2。整个根区冬小麦根系的平均半径为 0.15 毫米。

表 2 不同土层中根系平均半径的实测值(mm)

Table 2 Measurements of mean root radiuses in different depthes of soil

深度间隔 (cm) Soil depth	0—5	5—15	15—25	25—35	35—45	45—55	55—65	65—75	75—85	85—95
平均根半径 (mm) Mean radius of root	0.20	0.18	0.17	0.16	0.14	0.11	0.12	0.14	0.12	0.15

2. 吸水过程中土壤—植物—大气连续体中的能量变化、转换及分布　在根系吸收土壤水分的过程中，讨论势能的变化及在 SPAC 各个部分的分布可以说明根系吸收土壤水分的能量特征。下面以试验数据为基础，结合数学模型，对根系吸水过程中的能量动态及其分布予以描述。

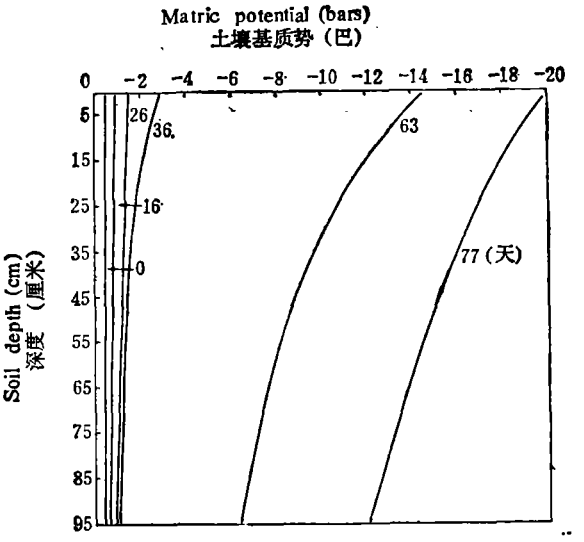


图 5　土壤基质势的动态剖面(曲线旁的数字为试验开始后的天数)

Fig. 5　Dynamic profiles of matric potential at different time (0,16,26, 36, 63 and 77 days)

(1) 土壤基质势的动态变化：通过对根系吸水物理过程的数学模拟，土壤基质势的动态过程如图 5 所示。图 5 表明：当土壤水分处于较高能量状态时（基质势≥−1 巴），根系吸水过程中土壤水分基质势随深度分布相当均匀，且基质势能的转换和消耗也以一种沿剖面等强度的方式进行。基质势低于−1 巴时，其剖面分布是极其不均匀的(比方说，第 63 天的基质势剖面上部与底部势差可达 8 巴左右)。在基质势小于−1 巴而大于−10 巴的范围内，基质势的转换和消耗，其强度沿剖面从上到下逐渐递减。当基质势低于−10 巴时，能量供给方式沿剖面等强度进行。

(2) 植物水势的动态过程：根系吸水过程中，植物水势(包括叶水势和根颈势)的动态过程如图 6 所示。

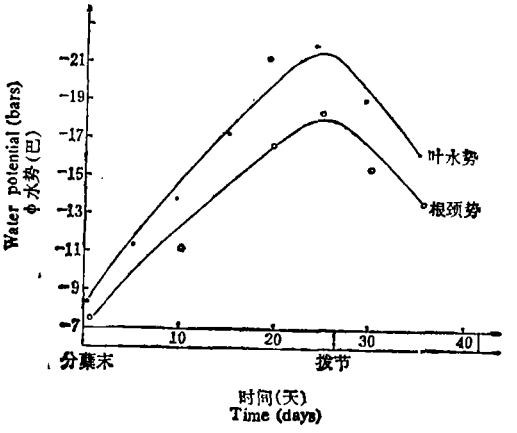


图 6　植物水势动态过程的实验测定

Fig. 6　Dynamic process of plant water potential

从图 6 可见：冬小麦吸水过程中在不给水的情况下，植物水势在分蘖末至拔节前几乎是线性下降，叶水势比根颈势下降略快。拔节后水势上升，其原因可能与冬小麦的生理节律有关。

两条曲线间的垂直距离为叶水势和根颈势在同一时刻的差值，其值在 2—4 巴之间，且随着小麦生长而增大。冬小麦拔节后，二者差值又有减少的趋势。两条曲线的水平间距，可理解为植物地上部分水分传输、能量转换过程中所产生的滞后时间，根颈与叶片间的滞后时间为 3—8 天，其物理意义是：根颈部的能态与 3—8 天前叶片的能态处于同一

水平上。

(3) SPAC 中的能量分布：SPAC 中的能量分布主要指土壤、植物和大气这三大部分的势能分布状况。大气水势由小气候测定资料计算。

土壤水势系整个根区基质势的平均值，植物水势仍分根颈和叶片两部分。其分布如图 7 所示。

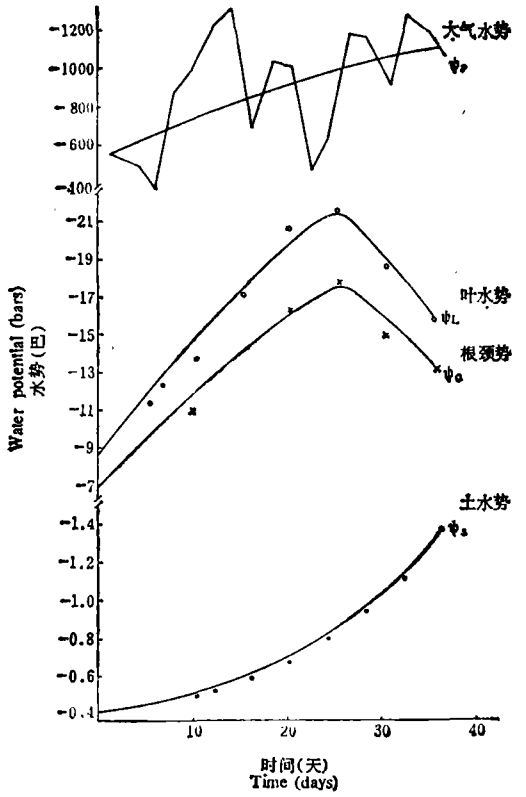


图 7 根系吸水过程中 SPAC 的势能分布

Fig. 7 Water potential distribution of soil, plant and atmosphere in water adsorption process by roots

从图 7 可以看出：在根系吸水过程中，水分从土壤经吸收和输送到植物根茎部，其能量降低约 10 巴左右；从根颈到叶部降低约 3 巴左右；从叶部汽化以水汽形式扩散到大气中去其能量损失多达 900 巴左右。这些水势的降落与各部分的水流阻力相对应。由此可以看出：水流在 SPAC 中运移时，其能量主要消耗在由叶部到大气这一环节上，这是因为水分在这一环节既要发生相变、又必须使得水汽分子有足够的动能才能逸出气孔扩散到周围的大气中去。这一物理过程是以付出水分势能为代价、能量转换为形式实现的。液态水其能量主要损失在由土壤进入根系这一环节上，因在这一环节水分必须克服较大的土根交界面的接触阻力和根内皮层的吸收阻力方能进入木质部的导管之中。

3. 植物根系吸收土壤水分的累计效应

(1) 根区水分吸收的空间累计效应：将吸水函数 ($S(z,t)$) 对空间积分可得到整个根区水分吸收的空间累计效应 $S(t)$，然后将 $S(t)$ 叠加起来便得到如图 8 的结果。从图可见：计算值和实测值符合得很好，尤其是 20 天以后二者几乎重合，这从另一方面更进一步地证实模型是可行的。模拟研究表明：空间累计吸收量几乎随时间线性增长，实验的结果也与此类同。

(2) 根区水分吸收的时间累计效应：将 $S(z,t)$ 对时间 (t) 积分得到根系吸水的时间累计效应 $S(z)$。其结果如图 9 所示。

结果表明：根系吸水的最大速率在 25 厘米处，45—85 厘米的土层中根系几乎以恒定的速率从土壤中摄取水分。任意两条曲线与直线 $z=0$，$z=95$ 所包围的面积代表在对应的时段内根系从土壤中吸水的总量。可以看出：在相等的时段内，根系吸收的总量近乎相等。这表明：当根区土壤的平均容积湿度不低于 22% (第 36 天土壤的平均容积含水量)之前，植物根系的吸水速率减小甚慢。

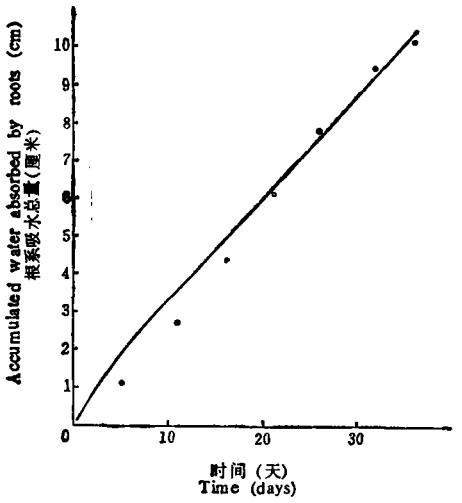


图 8　植物根系吸收土壤水分的空间累计效应

Fig. 8　Space cumulative effect of water absorption by plant roots in soil

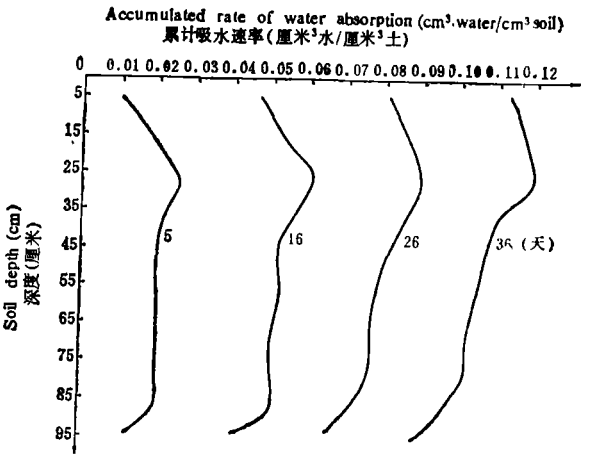


图 9　植物根系吸收土壤水分的时间累计效应

Fig. 9　Time cumulative effect of water absorption by plant roots in soil

(3) 根区水分吸收与根密度的关系及有效根密度分布：将表 3 中试验末的体积根密度(第 40 天)和图 9 中累计吸水速率(第 36 天)联系起来进行分析，可查明土壤剖面不同深度处单位根长的相对吸水速率，最后分析得出单位土体中吸水根系的长度随深度的分布，即有效根密度分布，其结果如表 3 所示。

表 3　植物实测根密度、有效根密度随深度的变化

Table 3　Variation of root density and effetive root density of plant with depth

深度 Z(cm) Depth	根密度 L_v (cm/cm³) Root density	累计吸水量 $S(z)$(cm³/cm³) Cumulative water absorption	单位根长吸水量 L_w (cm³/cm) Water absorption per unit root length	单位根长相对吸水量 RI_w Relative water extraction per unit root length	有效根密度 DF (cm/cm³) Effective root density	相对有效根密度 RDF Relative effective root density
5	2.37	0.112	0.047	0.049	0.116	0.928
10	0.74	0.114	0.154	0.162	0.120	0.960
20	0.13	0.119	0.915	0.963	0.125	1.000
30	0.12	0.114	0.950	1.000	0.120	0.960
40	0.17	0.108	0.635	0.668	0.114	0.912
50	0.31	0.106	0.342	0.360	0.112	0.896
60	0.21	0.103	0.490	0.516	0.102	0.816
70	0.17	0.101	0.594	0.625	0.106	0.848
80	0.16	0.099	0.619	0.652	0.104	0.832
90	0.12	0.090	0.750	0.789	0.095	0.760

有效根密度其含义是 1 立方厘米土体中吸水根系长度的厘米数，因而它能反映植物根系吸收土壤水分的特征，其大小决定植物根系吸水的多少，换言之，根系吸水速率与有效根密度成正比。由于有效根密度在根系吸收土壤水分方面有如此重要的意义，因而查清有效根密度的物理基础是必要的。

从表 3 可得剖面中有效根密度的平均值 $\overline{DF}=0.1114$ 厘米/厘米³，Walter 和 Barley,

Ponsana 等人[13]研究了小麦根密度(L_v)与毛根密度(L_H)的关系，结果是：$L_H = (0.1—0.3)L_v$。从表 3 中求得 L_v 沿剖面的平均值为 0.45 厘米/厘米^3，若取 $L_H = 0.2L_v$，则毛根密度的平均值为 $\bar{L}_H = 0.090$ 厘米/厘米^3。显而易见，$\bar{L}_H$ 与 $\overline{DF}$ 非常接近。由此可以认为有效根密度是单位土体中毛根的长度，即有效根密度的物理基础为毛根密度。因此，吸水速率与根密度不是简单的正比关系，对那些吸水模式中吸水速率与根密度成正比的关系进行修正是必要的。

由根密度可计算出水分从土壤向根系移动的最大平均距离。这个距离在上层 5 厘米的土层中为 0.35 厘米，底层 10 厘米的土层中为 1.5 厘米。从根系吸收水量的结果表明：距根系 1.5 厘米以内土壤中的水分向根系移动并不困难。换句话说，在这个距离内水是可以"找"根的。这里应指出的是：虽然剖面上、下层水分到根的距离有较大差别(四倍多)，但吸收的水量差别较小，其原因是上、下层中有效根密度相差不大，即水分到吸水根系(毛根)的平均最大距离差别不大，上层为 1.77 厘米，下层为 1.83 厘米。

由表 3 计算可求得小麦根系的吸水速率为 0.026 厘米^3/天·厘米根。Greacen 等人[13]测定的麦根吸水速率为 0.024 厘米^3/天·厘米根，这与本文的研究结果很接近。由于本文中的结果是采用根系的吸水模式计算出来的，因此，就进一步说明由本模式来描述植物根系吸收土壤水分与实际情况是接近的。

参 考 文 献

[1] 邵明安，1986：植物根系吸收土壤水分的数学模型(综述)。土壤学进展，第 3 期，6—15 页。

[2] 邵明安，1985：不同方法测定土壤基质势的差别及准确性的初步研究。土壤通报，第 16 卷 5 期，223—226 页。

[3] 邵明安，1985：根据土壤水分再分布过程确定土壤的导水参数。中国科学院西北水土保持研究所集刊，第 2 集，47—53 页。

[4] 邵明安，1985：四种方法推求土壤导水参数的差别及其准确性。中国科学院西北水土保持研究所集刊，第 2 集，54—62 页。

[5] 雷志栋、杨诗秀，1982：非饱和土壤水一维流动的数值计算。土壤学报，第 19 卷 2 期，141—153 页。

[6] Gardner, W. R., 1960: Dynamic aspects of water availability to plants. Soil Sci., 89: 63—73.

[7] Molz, F. J. and Remson, I., 1970: Extraction term models of soil moisture use by transpiring plants. Water Resour. Res., 6: 1346—1356.

[8] Nimah, M. N. and Hanks, R. J., 1973: Model for estimating soil water, plant and atmosphere interrelations. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 37: 522—527.

[9] Hillel, D., Talpaz, H. and Van Keulen, H., 1976: A macroscopic scale model of water uptake by a nonuniform root system and salt movement in the soil profile. Soil Sci., 121: 242—255.

[10] Feddes, R. A., Kowalik, P. J. and Zaradny, H., 1978: "Simulation of Field Water Use and Crop Yield", Centre For Agricultural Publishing and Documentation, pp. 19—20, Wageningen, the Netherlands.

[11] Herkelrath, W. N., Miller, E. E. and Gardner, W. R., 1977: Water uptake by plants, 2, The root contact model, Soil Sci. Am. J., 41: 1039—1043.

[12] Molz, F. J., 1981: Models of water transport in the soil-plant system: A review. Water Resour. Res., 17: 1245—1260.

[13] Greacen, E. L. et al., 1976: Resistance to water flow in the roots of cereals. in "Water and Plant Life: Problems and Modern Approaches" (Lange, O. L. et al. ed.) pp. 86—100, Springer-Verlag, Germany.

MATHEMATICAL MODEL OF SOIL MOISTURE ABSORPTION BY PLANT ROOTS

Shao Mingan, Yang Wenzhi and Li Yushan

(Northwestern Institute of Soil and Water Conservation, Academia Sinica)

Summary

A model based on the physical process of water absorption by plant roots has been suggested in this paper. Data obtained from the comparison between modeling results and experimental results showed that this model is quite satisfactory for prediction of soil moisture regime.

Quantitative description of water potentials in soil, plant and atmosphere. In describing the interlinked process of water transport was made in the modelling water movement process, and the characteristics for process of energy consumption and transformation in the water movement process was also investigated simultaneously.

It was also showed from the results obtained that the relationship between water absorption was close related to the effective root density. Therefore, it is of most importance to promote and strengthen the development of plant roots.