

# 降雨条件下土壤入渗的规律研究

孙 菽 芬

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

本文从描述非饱和土壤中水分流动的基本方程出发,对 4 种不同典型土壤在各种假定的均匀降雨速率下的入渗速率进行了数值模拟。结果表明,在降雨初期,由于降雨率低于入渗率,故全部雨量入渗,但当雨率大于入渗速率之后,入渗流动可以比拟为饱和水柱向非饱和区推进的柱塞流,其速率与饱和水柱长度成反比,而与分隔非饱和区与饱和水柱的湿润阵面上吸力大小成正比。如果对实际计算的吸力与 Mein 及 Larson 所推荐的理论计算吸力分别按各自最大吸力进行无量纲化,发现二者值吻合得很好。

根据柱塞流这样一个概念,本文推导了决定入渗率等于雨率时的时间及该时的湿润锋面位置,并继而推导了在此以后,如果雨率永远大于入渗率情况下(并且不考虑地表有积水)入渗速率与湿润锋面位置的解析解,大大地简化了入渗率的工作量,具有实际应用的意义。

在过去的一、二十年中,一个流域在降雨过程中,水分循环的定量地数学描述已为人们所重视,有的模型已就水分循环各个子过程(如雨水入渗、蒸发及地表水流动)进行了定量地描述<sup>[3]</sup>,在这些过程中,决定入渗率是十分重要的,它的大小与土壤中含水量、蒸发量及迳流量直接有关,据报道,如在美国国土上有 70% 的雨量是入渗至土的,而这个值与平均蒸发量是同量级的。过去已有很多方法去定量描述入渗规律<sup>[5]</sup>,包括从严格求解土壤中水分运动基本方程到各种各样经验公式。前者虽然精确,但对计算机及土壤性质了解要求高,使用起来尤其在工作中不方便。而后者虽然简便,但大多数都包含了若干缺乏明确物理意义而事先又难以确定的参数,所以通用性不强。近来,Green-Ampt<sup>[6]</sup>关于入渗速率求解想法又重新为人们所重视,按照他们的想法,土壤在降雨时的入渗过程可以比拟为向土壤非饱和区推进的饱和水柱柱塞流,其向下推进的速率(即入渗速率  $q$ ) 可表达为(见图 a<sup>1)</sup>):

$$q(t) = K_s \cdot \left[ 1 + \frac{S}{L} \right] \quad (1)$$

式中  $K_s$  为土壤饱和传导度,  $L$  为湿润锋面抵达的位置(即饱和水柱的长度),  $S$  为湿润锋面上吸力。

1) 图 a 中  $\theta$  表示土壤水分体积含量,  $R$  为降雨速率,  $Z$  为从地表算起往下的深度。本文规定下标  $s$  及  $i$  表示饱和状态及初始状态,以后用到的下标  $c$  及  $T$  分别表示计算所得的结果及 Mein 及 Larson 所建议理论值。

## 一、基本方程及计算方案

本文的目的在于从土壤中水分运动基本方程出发,采用数值模拟方法,对各种均质土壤在不同降雨类型及不同土壤初始含水量下进行求解,然后从计算结果分析入渗率的规律并寻得简便估计入渗的办法。

均质土壤一维垂直方向上的运动方程为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Z} - K(\theta) \right] \quad (2)$$

其中:  $D(\theta)$  为水份扩散系数,  $K(\theta)$  为水力传导度。为使方程定解,必须给定适当的初始及上下边界条件。

本计算采用初始均匀含水层,即初始条件:

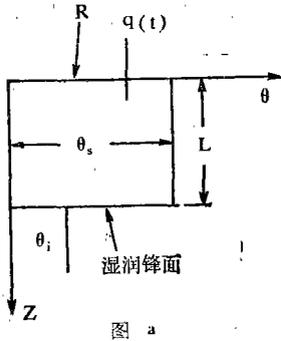
$$\theta(Z) = \theta_i = \text{常数} \quad (t = 0, 0 \leq Z \leq H, H \text{ 为很大值}) \quad (2a)$$

下边界条件应设在深度  $H$  处,设该处  $\theta$  保持不变,则有:

$$\theta = \theta_i, \text{ 在 } Z = H \text{ 处及 } t > 0 \quad (2b)$$

上边界条件应分为二个阶段,一开始由于降雨速率  $R$  小于入渗速率的能力,故入渗率  $q = R$ 。在时刻  $T_i$  时,  $q(t) = R$ ,以后雨率总假定大于入渗速率,故土壤表面有多余的水,但本计算不考虑表面积水,只认为从这以后表面处于饱和水分状态,故上边界条件为:

$$\begin{cases} q(t) = R, \text{ 或者:} \\ \theta(t)|_{z=0} = \theta_s \left( \text{当 } -D \frac{\partial \theta}{\partial Z} + K(\theta)|_{z=0} < R \right) \end{cases} \quad (2c)$$



方程(2)及有关定解条件(2a)~(2c)组成了非线性的动力系统,其解析解一般是不存在的,只能通过数值计算用计算机求解。为了使非线性方程线性化,本文采用了预报-修正法<sup>[1]</sup>。最终对于预报步及修正步都得到显性的三对角方程,可用追赶法求解。

由于方程(2)为质量守恒型方程,为了保持差分格式守恒性,采用了控制体积守恒型差分格式。在差分网格间距安排上,由于土壤表面层水分变化很快,故采用变间距网格办法,即表面处网格细密,往下面网格变粗。

## 二、计算实例及结果分析

本文对4种土壤在各种假定均匀雨率下入渗进行了数值模拟。4种土壤为 Adelando 壤土<sup>[4]</sup>、Yolo 轻粘土<sup>[5]</sup>、Upland 砂土<sup>[5]</sup>和 Plainfield 砂土<sup>[5]</sup>,它们的性质在所列的文献中给出。

表1列出4种土壤所作的计算模拟的组合情况,表中  $R$  表示降雨速率(以  $n \cdot K_s$  来表示)。表中对每一种情形所规定符号与图1中符号相对应。 $K_s$  为饱和土壤导水度。

为了发现入渗速率  $q(t)$  与入渗时湿润锋阵面位置  $L(t)$  的关系,图1画出了4种

表 1 模拟研究算例  
Table 1 Cases for simulation study

壤 土 Loamy (Adelando)				
$\theta_i$	$R = n \cdot K_s$			
	$4K_s$	$8K_s$	$12K_s$	$16K_s$
0.15	+	+	+	+
0.25	●	●	●	●
0.30			△	
0.35			*	
轻 粘 土 Light clay (Yolo)				
$\theta_i$	$R = n \cdot K_s$			
	$60K_s$	$120K_s$	$180K_s$	
0.20	+	+	+	
0.30	●	●	●	
0.40	△	△	△	
砂 土 Sand (Upland)				
$\theta_i$	$R = n \cdot K_s$			
	$4K_s$	$8K_s$		
0.10	+	+		
0.17	●	●		
0.24	△			
砂 土 Sand (Plainfield)				
	$R = n \cdot K_s$			
	$4K_s$	$8K_s$		
0.25	+	+		
0.35		●		

土壤在不同初始含水量条件下  $q(t)$  与  $1/L$  之间的关系。而其中  $L(t)$  为某一入渗总量情况下,湿润锋面按柱塞流方式所应达到位置,从计算结果可推得出:

$$L(t) = 1/(\theta_s \cdot \theta_i) \cdot \int_0^H (\theta(t, Z) - \theta_i) dZ \quad (3)$$

$\theta(t, Z)$  为计算所得的结果。

从图 1,可以得到几点结论:(1)所有计算结果都表明当入渗速率  $q(t)$  小于降雨率时,  $q(t)$  值与  $1/L$  几乎成正比关系,这证明入渗速率可由比拟为饱和水柱向下移动的柱塞流方式来求得。(2)当土壤入渗率小于降雨率时,决定  $q(t)$  与  $1/L$  之间线性关系的斜率与降雨率基本无关,而与土壤层初始含水量有关,当然也与土壤种类有关。若设这样一个斜率的计算模拟值(从图中得到)为  $K_s \cdot S_c(\theta_i)$ ,那么可由图得到不同  $\theta_i$  不同土壤的  $K_s \cdot S_c(\theta_i)$  值。如果外推  $K_s \cdot S_c(\theta_i)$  便可得到不同土壤的  $K_s \cdot S_c(\theta_i = 0)$  的值,记作  $K_s \cdot S_c(0)$ 。(3) Mein 及 Larson<sup>[5]</sup> 曾经建议  $q(t)$  与  $1/L$  之间关系可表达为直线关系,

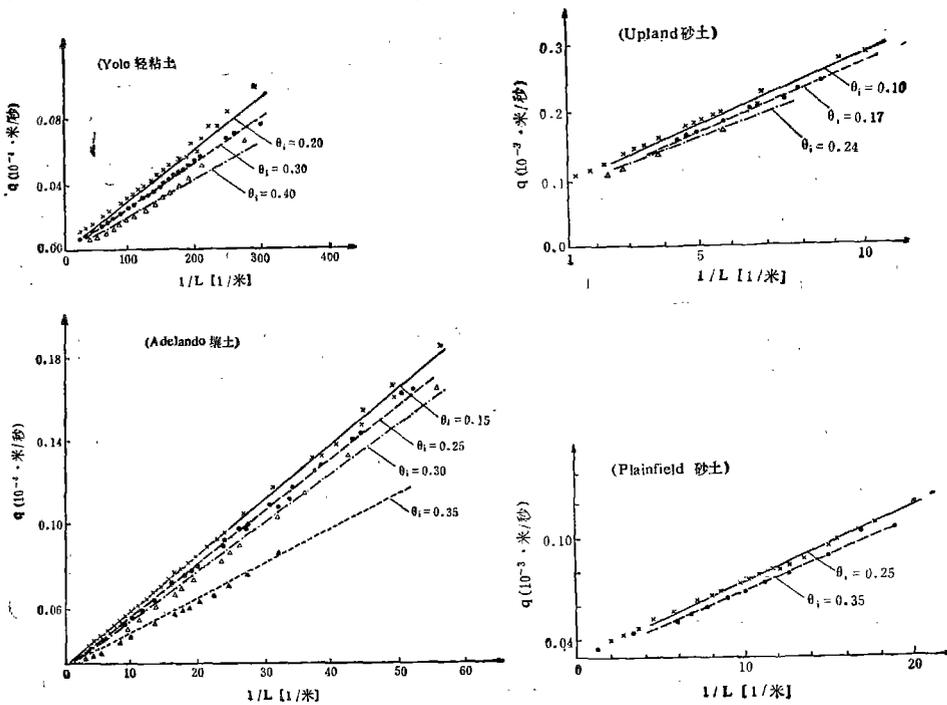


图 1 入渗率与湿润锋下移深度关系

Fig. 1 Relation between infiltration rate and wetting front depth below soil surface

而其斜率为  $K_s$  与吸力  $S(\theta_i)$  二者的乘积，本文称之为理论值，并记这理论斜率值为  $K_s \cdot S_T(\theta_i)$ 。按照他们的建议， $K_s \cdot S_T(\theta_i)$  应为：

$$K_s \cdot S_T(\theta_i) = \int_{\theta_s}^{\theta_i} K \cdot d\psi \tag{4}$$

其中  $\psi$  为每种土壤基模势， $K$  为与  $\theta$  有关的导水度。(4) 计算结果所得的  $K_s \cdot S_c(\theta_i)$  与理论值  $K_s \cdot S_T(\theta_i)$  很为接近，而且如果将  $K_s \cdot S_c(\theta_i)$  及  $K_s \cdot S_T(\theta_i)$  无量纲化后，即定义无量纲值：

$$\begin{aligned} \gamma_T &= [K_s \cdot S_T(\theta_i)] / [K_s \cdot S_T(0)] \\ \gamma_c &= [K_s \cdot S_c(\theta_i)] / [K_s \cdot S_c(0)] \end{aligned}$$

发现  $\gamma_T(\theta_i)$  与  $\gamma_c(\theta_i)$  值很接近。表 2 给出了经过外插所得的  $K_s \cdot S_c(0)$  及理论值  $K_s \cdot S_T(0)$ 。图 2 分别给出了 4 种土壤的无量纲化后斜率值  $\gamma_T$  及  $\gamma_c$  值比较。其中四

表 2 各种土壤的斜率值 (米<sup>2</sup>/秒)

Table 2 Value of slope for soils (m<sup>2</sup>/sec.)

斜率值 Slop value	壤 土 Loamy (Adelando)	轻粘土 Light clay (Yolo)	砂 土 Sand (Upland)	砂 土 Sand (Plainfield)
$K_s S_T(0)$	$0.362 \times 10^{-6}$	$0.328 \times 10^{-7}$	$0.189 \times 10^{-4}$	$0.45 \times 10^{-3}$
$K_s S_c(0)$	$0.320 \times 10^{-6}$	$0.313 \times 10^{-7}$	$0.186 \times 10^{-4}$	$0.44 \times 10^{-3}$

条线是根据 Mein 及 Larson 理论算得的  $\gamma_r$  值, 而四种符号 (○, △, +, ●) 是分别指用本文数值计算模拟得到的 4 种土壤的  $\gamma_c$  值。

本文计算结果及以上分析亦说明了 Greem-Ampt 柱塞流模型可以用来估计实际降雨情况下的人渗速率的, 具有一定的实用意义。

对于一个实际的雨型, 如若开始入渗率大于降雨速率, 而后在某一时刻入渗率等于降雨速率, 以后雨率又若总是大于入渗率, 那么在不考虑地表积水情况下入渗率估计办法如下:

假定降雨速率分布为  $R(t)$ , 在第一阶段, 由于雨率  $R(t)$  小于入渗能力  $q(t)$ , 所以  $q(t)$  等于  $R(t)$ , 但到某一个时刻  $T_1$ ,  $q(T_1)$  则等于  $R(T_1)$ , 按柱塞流理论可以定出  $T_1$  及湿润锋面向下推进距离  $L(T_1)$ , 条件是只要知道  $K_s$  及  $S(\theta_i)$ 。

方法是联立求解以下方程组 (5a) 及 (5b):

$$q(T_1) = R(T_1) = K_s + \frac{K_s S(\theta_i)}{L(T_1)} \quad (5a)$$

$$L(T_1) = \int_0^{T_1} R(t) dt / (\theta_s - \theta_i) \quad (5b)$$

对于  $R(t)$  为常雨率  $R_0$  的情况, 则有简单的关系式:

$$L(T_1) = K_s \cdot S(\theta_i) / (R_0 - K_s) \quad (5c)$$

$$T_1 = L(T_1) \cdot (\theta_s - \theta_i) / R_0 \quad (5d)$$

在时刻  $T_1$  以后,  $R(t)$  按假定雨型总大于入渗率  $q(t)$ , 这时按柱塞流理论, 决定  $q(t)$  及  $L(t)$  的方程变为:

$$\begin{cases} q(t) = K_s + \frac{K_s \cdot S(\theta_i)}{L(t)} & (5e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = q(t) / (\theta_s - \theta_i) & (5f) \end{cases}$$

当  $T = T_1$  时  $L = L(T_1)$  (前已决定)

由方程 (5e) 及 (5f) 可以直接求解  $q(t)$  及  $L(t)$ 。经适当运算, 可以直接求得积分分解如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L(t) - L(T_1)}{a} - \frac{b}{a^2} \ln \frac{aL(t) + b}{aL(T_1) + b} &= t - T_1 \\ \text{或者: } Y(t) - Y(T_1) - b \ln \frac{Y}{Y_1} &= a^2(t - T_1) \end{aligned} \right\} \quad (5g)$$

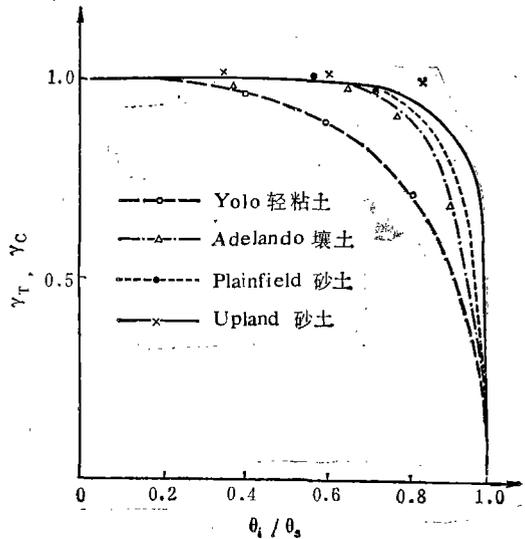


图2 无量纲化的斜率值  
Fig. 2 Nondimensional slop value

$$\text{及} \quad q(t) = K_s + \frac{K_s \cdot S(\theta_i)}{L(t)} = K_s + a \cdot \frac{K_s \cdot S(\theta_i)}{(y(t) - b)} \quad (5h)$$

其中:  $a = K_s / (\theta_s - \theta_i)$ ,  $b = a \cdot S(\theta_i)$  及  $y(t) = a \cdot L(t) + b$ 。

公式 (5a) 至 (5h) 给出了一定雨型下决定入渗速率  $q$  随时间变化规律。决定这种规律的重要参数是  $K_s \cdot S(\theta_i)$ 。一般很难实测得到  $K_s \cdot S(\theta_i)$ , 但是表 1 及图 2 说明只要已知土壤水分特性就可由公式 (5) 相当近似地给出  $K_s \cdot S(\theta_i)$ 。进一步, 除了含水量很接近饱和值外,  $K_s \cdot S(\theta_i)$  还可用  $K_s \cdot S(0)$  来近似, 不会有很大误差。

当然, 实际入渗速率受很多因子影响, 首先不存在真正均质的实际土壤, 另外降雨时由于雨滴冲击, 表面性质将有较大改变, 所以上述结论及相应估算公式必须慎重地针对实际情形加以采用。土壤入渗问题对于水资源评价及利用等问题的研究十分重要, 尚有待进一步深入研究。

### 参 考 文 献

- [1] 南京大学数学系计算数学专业编, 1979: 偏微分方程数值解法。科学出版社。
- [2] Black, T. A., et al., 1969: The prediction of evaporation drainage and soil water storage for a bare soil. *Soil. Sci. Soc. Amer. Proc.*, 33: 655—660.
- [3] Crawford, N. H. and Linsley, R. K., 1962: The Synthesis of continuous streamflow hydrographs on a digital computer. *Tech. Rep. 12*, pp. 28—52. Dept. of Civil Eng. Stanford Univ.
- [4] Jackson, R. D., 1973: Diurnal change in soil water content during drying in field soil water regions. *Soil Sci. Soc. Amer.*, Special Publication No. 5.
- [5] Mein, R. G. and Larson, C. L., 1973: Modeling infiltration during a steady rain. *Water Resour. Res.*, 9(2): 384—394.

## STUDY ON INFILTRATION UNDER RAINING

Sun Shufen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Summary

A simulation study of the infiltration rate was conducted for four soils with different rain patterns. Computational results showed that the rain water was infiltrated into soil when the infiltration rate was greater than the rain rate at the earlier stage of the rain, and then the infiltration flow was calculated by analogy with saturated piston-flow, the infiltration rate was in direct proportion to the suction head at the wetting front, a front of demarcation between saturated and unsaturated zones, and in inverse proportion to the saturated zone length. With the definition of nondimensional suction head equal to the suction head divided by its maximum one, the nondimensional heads calculated from the theory of Mein and Larson and predicted by the simulation study were in good agreement.

By using the piston-flow concept, the method to determine the ponding time and wetting front depth has been derived in this study. Also, the analytical solution for infiltration rate and wetting front location below the soil surface, during the period when rain intensity is always greater than infiltration, has been obtained.