

## 土壤颗粒的分形特征及其应用\*

黄冠华 詹卫华

(中国农业大学水利与土木工程学院, 北京 100083)

**摘 要** 本文应用土壤颗粒的质量分布原理来描述土壤颗粒的分形特征。通过对 10 种土壤颗粒的机械组成进行分析, 分别计算出它们的分形维数 ( $D = 2.489 \sim 2.896$ ), 并分析了其与土壤质地之间的关系。同时对土壤颗粒分形维数与所对应土壤的幂函数型水分特征曲线的拟合分形维数进行比较分析, 建立了二者之间的相关关系。结果表明: 分形维数的大小反映了土壤质地中粘粒、粉粒和砂粒含量的变化, 随粘粒含量的增多分形维数增大, 随砂粒含量的增多分形维数减小; 同时土壤颗粒分形维数与所对应的水分特征曲线的拟合分形维数呈现出良好的一致性, 因而对所研究的土壤而言, 可应用土壤颗粒的质量分形维数结合幂函数模型来估算土壤水分特性曲线。

**关键词** 分形维数, 土壤颗粒分布, 土壤水分特性曲线

**中图分类号** S152.3

土壤是由大小、形状不同的固体组分和孔隙以一定的形式连结所形成的多孔介质。土壤中各固体组分的大小、数量、形状及其结合方式决定着土壤的质地与结构, 并进而影响土壤的物理性质。传统的土壤质地与结构, 是以土壤颗粒的机械分析为基础, 结合相应的分类标准而确定的。自 80 年代以来, 一些研究<sup>[1,2]</sup>表明, 土壤粒径、颗粒表面积、颗粒体积、孔隙大小等具有自相似特征, 因而分形理论的应用已成为定量描述土壤结构特征的新方法。

研究<sup>[2]</sup>表明土壤颗粒大小的分布遵循关系:  $NR_i^D = \text{constant}$  (其中  $R_i$  为第  $i$  粒级的颗粒半径;  $N$  为粒径大于  $R_i$  颗粒的数目;  $D$  为颗粒大小分布的分形维数)。上述关系式涉及一个数量参数  $N$  (粒径大于某一半径  $R$  时颗粒的个数), 由于  $N$  很难通过实验直接测得, 因而难于较准确地确定分形维数  $D$  的值。Tyler 和 Wheatcraft<sup>[3]</sup>、杨培岭等<sup>[4]</sup>通过粒径分布与对应的质量分布相联系, 提出了确定土壤颗粒大小分布分形维数的新方法。该方法只需通过土壤颗粒的机械组成分析, 便可方便地确定相应的分形维数。

土壤孔隙大小分布决定着土壤水力特性。许多研究将土壤的水力特性(水力传导度、水分特征曲线)与土壤孔隙大小分布联系在一起, 并建立包含有孔隙分布的分形维数的描述土壤水力特性的数学模型<sup>[2,3,5~9]</sup>。由于测定土壤孔隙结构特征的困难, 使得难于确定土壤的孔隙分布分形维数。Tyler 和 Wheatcraft<sup>[2]</sup>通过先求出土壤颗粒大小分形维数, 再假设其与孔隙通道分形维数的关系, 然后求出后者的大小。但多数研究是通过实际测定土壤水分特性参数, 通过模型拟合反求孔隙大小分布的分形维数<sup>[5,9]</sup>。

\* 国家自然科学基金项目(59879028)及霍英东青年教师基金项目(71027)资助

收稿日期: 2000-11-11; 收到修改稿日期: 2001-03-15

本研究在对不同地点采集的 10 种土壤进行机械分析的基础上,以基于质量分布确定土壤颗粒大小分布分形维数的方法,计算了各种土壤的分形维数,并对分形维数与土壤质地的关系进行了分析。最后,对土壤颗粒大小分布的分形维数与土壤水分特性曲线的拟合分形维数进行比较,探讨应用基于质量分布的土壤颗粒大小分布的分形维数描述土壤水分特性曲线的可能性。

## 1 基本原理

假定具有自相似结构的多孔介质土壤由不同大小的颗粒所组成,在二维平面中,大于某一特征尺度  $R$  的颗粒所占有的面积  $A$  为<sup>[3]</sup>:

$$A(r > R) = C_a \left[ 1 - \left( \frac{R}{\lambda_a} \right)^{2-D} \right] \quad (1)$$

式中:  $r$  为测定尺度;  $C_a$ 、 $\lambda_a$  为常数,与颗粒大小、形状有关。将(1)式推广到三维空间,则大于某一特定粒径  $R_i$  ( $R_i > R_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$ , 随着下标的增加粒径逐渐减小)的土粒构成的体积  $V$  为:

$$V(r > R_i) = C_v \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{\lambda_v} \right)^{3-D} \right] \quad (2)$$

式中:  $C_v$ 、 $\lambda_v$  为常数,与颗粒大小、形状有关。

通常将土壤机械分析中位于两筛分粒级  $R_i$  与  $R_{i+1}$  之间的颗粒用它们的算术平均值  $\bar{R}_i$  表示,则大于某一给定平均粒径  $\bar{R}_i$  的体积为:

$$V(r > \bar{R}_i) = C_v \left[ 1 - \left( \frac{\bar{R}_i}{\lambda_v} \right)^{3-D} \right] \quad (3)$$

假定各粒级土粒比重  $\rho_i = \rho$  均一,不存在任何差异,则大于某一给定平均粒径  $\bar{R}_i$  的质量为:

$$M(r > \bar{R}_i) = \rho V(r > \bar{R}_i) = \rho C_v \left[ 1 - \left( \frac{\bar{R}_i}{\lambda_v} \right)^{3-D} \right] \quad (4)$$

当假定平均粒径  $\bar{R}_i = 0$  时,(4)式即变为计算全部土壤颗粒总质量  $M_T$ :

$$M_T = M(r > 0) = \rho V(r > 0) = \rho C_v \left[ 1 - \left( \frac{0}{\lambda_v} \right)^{3-D} \right] = \rho C_v \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式,则:

$$M(r > \bar{R}_i) = M_T \left[ 1 - \left( \frac{\bar{R}_i}{\lambda_v} \right)^{3-D} \right] \quad (6)$$

即:

$$\frac{M(r > \bar{R}_i)}{M_T} = 1 - \left( \frac{\bar{R}_i}{\lambda_v} \right)^{3-D} \quad (7)$$

假设  $R_{\max}$  为最大土壤颗粒粒径,由(7)式知,当  $r > R_{\max}$  时,  $M(r > R_{\max}) = 0$ ,则等式左边即为 0,即:

$$\frac{M(r > R_{\max})}{M_T} = 1 - \left( \frac{R_{\max}}{\lambda_v} \right)^{3-D} = 0 \quad (8)$$

从而可得出  $\lambda_v = R_{\max}$ ,所以(7)式变为:

$$\frac{M(r > \bar{R}_i)}{M_T} = 1 - \left( \frac{\bar{R}_i}{R_{\max}} \right)^{3-D} \quad (9)$$

由于:

$$\frac{M(r < \bar{R}_i)}{M_T} = 1 - \frac{M(r > \bar{R}_i)}{M_T} \quad (10)$$

所以:

$$\frac{M(r < \bar{R}_i)}{M_T} = \left(\frac{\bar{R}_i}{R_{\max}}\right)^{3-D} \quad (11)$$

对上式两边取对数,即得:

$$\lg\left[\frac{M(r < \bar{R}_i)}{M_T}\right] = (3-D)\lg\left(\frac{\bar{R}_i}{R_{\max}}\right) \quad (12)$$

由(12)式可知式中各土壤颗粒的粒径及小于某一级粒径土壤质量可通过土壤的机械分析确定,然后方便地求出土壤颗粒分布的分形维数。

## 2 试验材料与方法

为了更好的体现土壤颗粒分布的分形特征,并分析土壤质地与分形维数的内在关系,分别在以下几个地点进行实地土壤取样:河南省新乡县古固寨镇三王庄村的试验田 0~40 cm、40~60 cm、60~100 cm 的土壤;北京市水利所通县永乐店试验站表层 0~15 cm 的土壤;中国农业大学东校区农业机械试验田 0~20 cm、20~40 cm、40~60 cm 的土壤;中国农业大学西校区科学园两个渗漏水池内 0~30 cm 的土壤;北京东北郊试验田 0~30 cm 的土壤。

本研究采用比重计法测定各土样的机械组成,并采用美国制的分类标准对土壤质地进行分类。

## 3 结果分析与讨论

### 3.1 分形维数的计算

根据上述几种土壤的实际测定资料,土壤粒径分析及质地分类见表 1 所示。

表 1 土壤粒径分析

Table 1 Particle size distribution of soils

土壤样本号 Sample No.	不同粒径(mm)范围内土壤颗粒重量与总重量之比 Over size mass ratio(%)							质地 Soil texture
	2~1	1~0.5	0.5~0.25	0.25~0.1	0.1~0.05	0.05~0.002	<0.002	
1	1.8	3.4	4.2	13.1	22.7	42.6	12.2	轻壤土
2	0.5	1.1	0.6	8.2	16.7	55.3	17.6	中粉质壤土
3	0.5	0.9	0.8	4.1	31.2	46.1	16.4	轻粉质壤土
4	0.5	1.9	1.2	16.1	22.7	44.5	13.1	轻壤土
5	1.8	0.8	2.6	16.9	19.3	42.7	15.9	轻粉质壤土
6	2.2	0.9	2.5	20.6	14.3	44.3	15.2	轻粉质壤土
7	0	0.2	0.4	1.4	13.5	39.3	45.2	粘土
8	0	0.3	0.8	68.7	12.8	14.4	3.0	壤质砂土
9	0.3	0.4	0.5	23.5	19.5	22.3	33.5	壤质粘土
10	0	0.3	0.3	49.6	35.4	5.2	9.2	砂质壤土

注:土壤样本号 1、2、3 分别为河南省新乡县古固寨镇三王庄村试验田 0~40 cm、40~60 cm、60~100 cm 的土壤;4 为北京市水利所通县永乐店试验站表层 0~15 cm 的土壤;5、6、7 分别为中国农业大学东校区农业机械试验田 0~20 cm、20~40 cm、40~60 cm 的土壤;8、9 为中国农业大学西校区科学园两个渗漏水池内 0~30 cm 的土壤;10 为北京东北郊试验田 0~30 cm 的土壤。

采用公式(12)对表 1 中的数据进行整理,分别计算  $\lg\left[\frac{M(r < \bar{R}_i)}{M_T}\right]$  和  $\lg\left(\frac{\bar{R}_i}{R_{\max}}\right)$ ,并以

$\lg\left[\frac{M(r < \bar{R}_i)}{M_T}\right]$  为纵坐标,  $\lg\left(\frac{\bar{R}_i}{R_{\max}}\right)$  为横坐标作双对数曲线, 将各种典型土壤的粒径分布的数据绘于图上, 如图 1 所示的是其中 7 种土壤有关二者的关系。将各种典型土壤的粒径分布数据用最小二乘法拟合成一条直线并计算其斜率  $\alpha$ , 由公式(12)知  $\alpha = 3 - D$ , 所以各种土壤的结构分形维数即为  $D = 3 - \alpha$ , 计算结果见表 2。

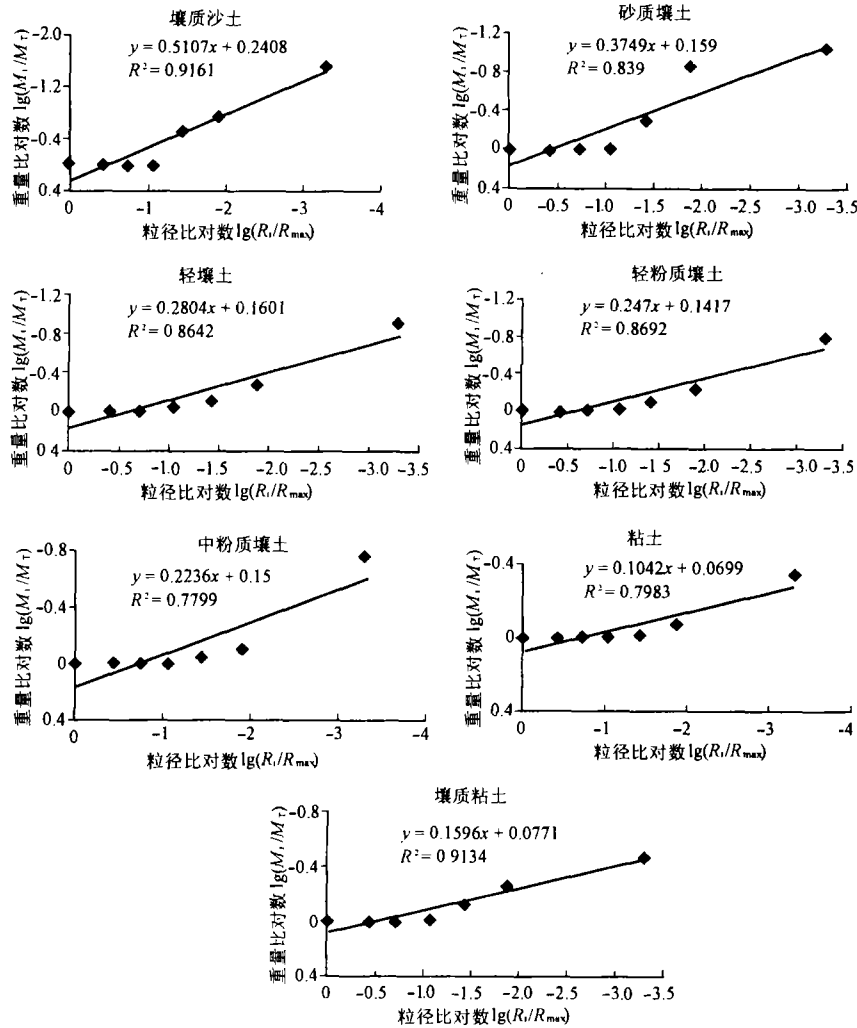


图 1 7 种典型土壤的  $\lg(\bar{M}_i/M_{\max})$  与  $\lg(\bar{R}_i/R_{\max})$  关系图

Fig. 1 Relationship between  $\lg(\bar{M}_i/M_{\max})$  and  $\lg(\bar{R}_i/R_{\max})$  for 7 typical soils

表 2 土壤颗粒分布的分形维数

Table 2 Fractal dimension of soil particle size distribution

土壤样本号 Sample No.	土壤质地 Soil texture	分形维数 $D$ Fractal dimension	拟合相关系数 Correlation coefficient
1	轻壤土	2.720	0.930
2	中粉质壤土	2.776	0.883
3	轻粉质壤土	2.759	0.906
4	轻壤土	2.728	0.925
5	轻粉质壤土	2.753	0.932
6	轻粉质壤土	2.749	0.930
7	粘土	2.896	0.893
8	壤质砂土	2.489	0.957
9	壤质粘土	2.840	0.956
10	砂质壤土	2.625	0.916

### 3.2 分形维数的影响因素分析

从表 2 的结果可知:各种土壤其颗粒分布的分形维数在 2.489 至 2.896 之间,该结果与杨培岭<sup>[4]</sup>采用相同方法测定的 11 种从壤质砂土到粘土的结果基本一致。且分形维数的大小与土壤质地密切相关。随着土壤质地由壤质砂土、砂质壤土、轻壤土、轻粉质壤土、中粉质壤土、壤质粘土、粘土的变化,分形维数逐渐增大。土壤颗粒粒径的大小对土壤颗粒间的结合、孔隙的大小、数量及几何形态都起着决定的作用。土壤分形维数是反映土壤结构几何形体的参数,在维数上表现出粘粒含量越高,其分形维数越高,土壤砂粒含量越高,其分形维数越低,如图 2,3 所示。从表 2 可以看出,粘土的质地最细,粘粒( $<0.002\text{mm}$ )含量大于 40%,它的分形维数( $D = 2.896$ )最大。壤土(如表 2 中的轻壤土 4)的颗粒较粘土粗,粘粒含量为 13.1%,低于粘土,其分形维数( $D = 2.728$ )也低于粘土,而壤质砂土颗粒直径最大,粘粒含量(为 3%)最低,故其分形维数( $D = 2.489$ )也最低。

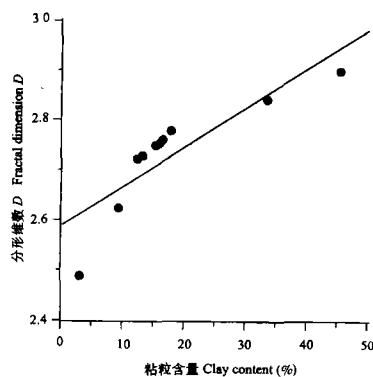


图 2 土壤颗粒分形维数与粘粒含量的关系

Fig.2 Relationship between fractal dimension and clay content of soils

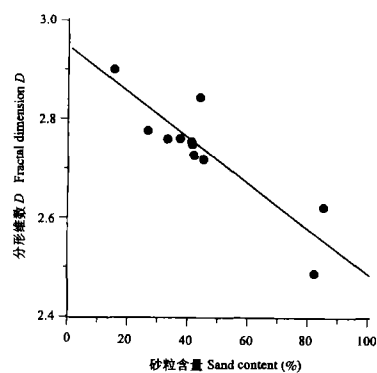


图 3 土壤颗粒分形维数与砂粒含量的关系

Fig.3 Relationship between fractal dimension and sand content of soils

### 3.3 土壤颗粒大小分形维数与土壤孔隙大小分形维数的关系

研究土壤的分形特征的目的是根据土壤的分形来表征土壤水力特性参数, Tyler 和 Wheatcraft<sup>[2,3]</sup>, Rieu 等<sup>[6,7]</sup>, 黄冠华和詹卫华<sup>[10]</sup>等分别推导出利用土壤孔隙分维表征土壤水分特性曲线的模型, 即利用由土壤孔隙大小的分形维数作为形参的模型描述土壤水分特性曲线。就现有的研究而言, 土壤颗粒大小的分形维数较容易通过土壤颗粒分析资料计算得到, 但孔隙大小分形维数则难于求得。对于一定的土壤而言, 如果能够通过一定的手段寻求土壤颗粒大小分形维数与土壤孔隙大小分形维数的关系, 就方便地通过将土壤孔隙大小的分形维数作为形参的模型确定土壤水分特性参数, 进而克服实际测定土壤水分特性参数的困难。

詹卫华<sup>(1)</sup>, 黄冠华和詹卫华<sup>[10]</sup>通过 Menger 海绵模型推导出水分特性曲线模型为:

$$\Psi = \Psi_a \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^{1/(D'-3)} \quad (13)$$

式中  $\theta_s$  为土壤饱和含水率;  $\Psi$  为土壤水基质吸力;  $\Psi_a$  为进气吸力;  $D'$  为 Menger 海绵体的分形维数, 反映了 Menger 海绵体孔隙大小的分布特征。该模型与 Brooks-Corey(1964)和 Campbell(1974)的经验模型<sup>[9]</sup>

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left( \frac{\Psi}{\Psi_a} \right)^{-\lambda} \quad \text{Brooks-Corey} \quad (14a)$$

$$\frac{\Psi}{\Psi_a} = \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^{-b_c} \quad \text{Campbell} \quad (14b)$$

的结构是一致的。式(14)中  $\lambda, b_c$  为经验常数。比较式(13)和(14)可知:  $\lambda = 3 - D, b_c = 1/(3 - D)$ 。

根据压力薄膜仪试验实测得到上述 10 种土壤的土壤含水率与土壤水吸力的关系, 并用上述模型进行拟合分析得到  $D'$  值见表 3。

表 3 土壤水分特征曲线模型拟合分形维数  $D'$  与土壤颗粒大小分形维数  $D$  的比较

Table 3 Comparison between fitted fractal dimension of soil water retention curve and fractal dimension of soil particle size distribution

	土壤样本号 <sup>1)</sup> Sample No									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D'$	2.762	2.777	2.747	2.713	2.759	2.759	2.860	2.522	2.796	2.653
$D$	2.72	2.776	2.759	2.728	2.753	2.749	2.896	2.489	2.840	2.625
相对误差(%) <sup>2)</sup>	1.544	0.036	0.507	0.550	0.218	0.364	1.243	1.326	1.549	1.067

1) 1,4—轻壤土;2—中粉质壤土;3,5,6—轻粉质壤土;7—粘土;8—壤质砂土;9—壤质粘土;10—砂质壤土

2) 相对误差为  $|D' - D|/D \times 100$

从表 3 和图 4 可以看出, 土壤水分特征曲线模型拟合分形维数  $D'$  与土壤颗粒大小分形维数  $D$  的大小十分接近, 其相对误差的最大值仅为 1.549%, 最小值为 0.036%, 平均相对误差为 0.84%。同时经拟合分析, 得到二者呈以下线性关系:

$$D' = 0.738D + 0.719 \quad (15)$$

因而对于本文所研究的 10 种土壤而言, 可以近似利用土壤颗粒大小分维数  $D$  代替反映

(1) 詹卫华, 土壤水力特性分形特征的研究. 中国农业大学学位论文. 2000. 44

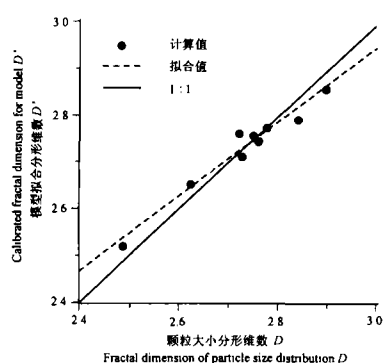


图4 土壤水分特征曲线模型拟合分形维数  $D'$  与土壤颗粒大小分形维数  $D$  的关系

Fig. 4 Relationship between fitted fractal dimension of soil water retention curve and fractal dimension of soil particle-size distribution

孔隙自相似特征的分形维数  $D'$ , 也可利用关系式(15), 根据所求得  $D$  来推求  $D'$ , 并进而由式(13)确定相应土壤的水分特性参数。事实上, 基于 Menger 海绵体的多孔介质, 其骨架与孔隙一样具有相同的自相似特征, 因而二者具有十分相近的分形特征。

## 4 结论

采用基于质量分布的分形维数的计算方法, 对 10 种土壤颗粒大小分布分形特征进行了研究, 同时分析了土壤颗粒分形维数与土壤质地以及土壤孔隙分维的关系。研究结果表明:

1. 土壤结构分布的分形维数不仅反映了土壤颗粒大小的影响, 而且体现了质地均一的程度。分形维数越高, 表明土壤质地越粘重, 通透性越差; 分形维数越低, 则表明土壤结构越松散。

2. 基于质量分布的土壤颗粒分形维数与反映土壤孔隙分形特征的水分特征曲线拟合分形维数具有良好的一致性。说明可采用基于质量分布的土壤颗粒分形维数与幂函数模型模拟或预测土壤水分特征曲线, 从而克服土壤水分特征曲线测定的困难。

## 参 考 文 献

1. Bartoli F, *et al.* Structure and self-similarity in silty and sandy soils: the fractal approach. *J. Soil Sci.*, 1991, 42:167 ~ 185
2. Tyler S W, Wheatcraft S W. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1989, 53:987 ~ 996
3. Tyler S W, Wheatcraft S W. Fractal scaling of soil particle size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1992, 56:362 ~ 369
4. 杨培岭, 罗远培, 石元春. 用粒径的重量分布表征的土壤分形特征. *科学通报*, 1993, 38(20):1896 ~ 1899
5. Perfect E, *et al.* An improved fractal equation for the soil water retention curve. *Water Resour. Res.*, 1996, 32(2):281 ~ 287
6. Rieu M, Sposito G. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1991, 55:1231 ~ 1238
7. Rieu M, Sposito G. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: II. Applications. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1991, 55:1239 ~ 1244
8. Turcotte D L. Fractals and fragmentation. *Journal of Geophysical Research*, 1986, 91(B2):1921 ~ 1926
9. Tyler S W, Wheatcraft S W. Fractal processes in soil water retention. *Water Resour. Res.*, 1990, 26(5):1047 ~ 1054
10. 黄冠华, 詹卫华. 土壤水分特征曲线的分形模拟. *水科学进展*, 2001(待刊登)

## FRactal PROPERTY OF SOIL PARTICLE SIZE DISTRIBUTION AND ITS APPLICATION

Huang Guan-hua Zhan Wei-hua

(Faculty of Hydraulic and Civil Engineering, China Agricultural University, East Campus, Beijing 100083)

### Summary

Numerous studies have shown that soil particle size distribution (PSD), mass distribution, surface distribution and pore size distribution are fractals, which are generally described with fractal geometry. In this paper, the fractal properties of ten types of soils from loamy sand to clay were investigated with the method developed by Tyler and Wheatcraft (1992) on the basis of accumulative mass distribution of soil particles. Sieving data sets of the above mentioned ten soils were used to calculate fractal dimension which ranged from 2.489 to 2.896, and relationship between fractal dimension of PSD and soil texture was analyzed. Meanwhile the fractal dimension of PSD was compared with the fitted fractal dimension calculated from the calibration of the power-law expression of the corresponding soil water retention function developed with Menger sponge, and the mathematical relationship between them was therefore established. Results indicated that the fractal dimension of PSD increased with clay content but decreased with sand content, and the fractal dimension of PSD was approximately the same as and in linear relationship with the fractal dimension of the power-law expression for the soil water retention function. This implies that the soil water retention properties can be predicted by the power-law function in combination with the mass based fractal dimension of PSD.

**Key words** Fractal dimension, Particle size distribution, Soil water retention curve