

## 处理土壤水垂直不饱和流问题的一种坐标变换方法\*

张洪<sup>1</sup> 李航<sup>2†</sup> 魏世强<sup>3</sup>

(1 西南农业大学农学与生命科学学院, 重庆北碚 400716)

(2 中国科学院南京土壤研究所土壤圈物质循环开放实验室, 南京 210008)

(3 西南农业大学资源与环境学院, 重庆北碚 400716)

**摘要** 尽管土壤水不饱和流问题的数值求解已经广泛地被采用, 但要了解土壤水不饱和运动的内在机理, 解析解仍然是无法被取代的。由于土壤水不饱和流的非线性使得解析解的获得非常困难, 特别是当考虑重力作用的不饱和流问题时, 情况将变得更加复杂。所以直到目前, 人们还没有得到考虑重力作用下的不饱和流方程的完整的解析解。本文提出了一种坐标变换方法, 将重力作用下的不饱和流方程变成了与无重力作用的不饱和流方程完全相同的形式, 进而首次获得了该问题的一个可用初等函数表达的解析解。本文所提出的坐标变换方法和所获得的解析解在实验上都得到了较好的验证。

**关键词** 垂直不饱和流; 坐标变换; 解析解

中图分类号 S152.7 文献标识码 A

在土壤水不饱和流动的研究中, 如何对非线性的流动方程进行求解往往是问题的核心。1931 年 Richards 将 Darcy 定律引入到土壤水的不饱和流动中, 并与质量守恒定律相结合, 得到了描述土壤水不饱和流动的基本方程, 这标志着土壤水运动的定量化研究进入了一个新时期。自 20 世纪 50 年代以来, 由于 Philip<sup>[1,2]</sup> 的开创性工作, 在不饱和流方程的精确求解方面取得了重要进展。在 Philip 的求解中以 Boltzmann 变换为基础, 采用迭代运算的方法先后获得了第一类边界条件及水平入渗、垂直入渗条件下的解。虽然 Philip 解还不是严格意义上的解析解, 但这些解第一次从理论上给出了土壤水不饱和流动的清晰图像, 并且这些结果在后来的研究中广泛地被采用, 例如, 这些解就往往被作为精确解来验证数值计算的结果。在此以后又有不少人在非饱和流方程的求解方法上进行了富有成效的探索, 比如 Parlange<sup>[3,4]</sup>、Broadbridge 和 White 等<sup>[5]</sup>。近年来, 国内也有一些人在开展这方面的研究, 比如张思聪等<sup>[6,7]</sup>、Shao 等<sup>[8]</sup>、邵明安等<sup>[9]</sup>、雷志栋等<sup>[10]</sup>、Han 等<sup>[11]</sup>、Xu 等<sup>[12]</sup>。然而目前所有这些解的最终结果, 都不是可用初等函数来表达的真正的解析解。

虽然数值求解已经作为处理土壤水运动的一个

有力工具, 但任何数值计算都无法清晰地给出物理过程的内在机制。因为过程的内在机制需要从两个方面去体现: 一是从所得的数学模型的类型和性质上来体现。如物理学中许多重要的发现都依赖于对数学模型的类型和性质的解释。二是通过对数学模型中各参数的物理意义的解释去反映过程的机制。而数值求解的结果不是用连续函数来表达的, 所以不存在去解释参数的物理意义的问题。这表明, 在某些特定条件下, 研究土壤水运动的解析解, 在土壤水动力学方面仍然具有重要的理论意义。

1997 年, 李航等<sup>[13,14]</sup> 获得了一个关于土壤水水平不饱和流动的解析解, 而且这是一个用初等函数表达的解析解。然而, 在土壤水垂直流动方面, 尽管半解析解或数值解很多, 但目前还未见到最终以初等函数表达的真正解析解。本文提出一种坐标变换方法, 将垂直不饱和流方程变换成与水平流方程完全相同的形式, 从而使水平流方程的求解方法完全适用于垂直流, 并最终获得其解析解。本文所提出的这种坐标变换方法, 在处理土壤各向异性条件下的水分运动和简化数值求解过程方面, 也有一定的参考价值。

\* 中国科学院南京土壤研究所土壤圈物质循环开放实验室开放基金资助

† 通讯作者: 李航(1963~), 男, 教授, 主要从事土壤化学与土壤物理学研究。E-mail: hli22002@Yahoo.com.cn

作者简介: 张洪(1960~), 男, 副教授, 主要从事农业气象及环境研究。E-mail: zhangh@swau.cq.cn

收稿日期: 2004-03-22; 收到修改稿日期: 2004-12-14

# 1 重力场中土壤水不饱和流方程的线性坐标变换

## 1.1 直角坐标系中的变换

在一直角坐标系  $(x, y, z)$  中, 对于各向同性的均质土壤, 考虑重力场作用的土壤水不饱和流的通量方程可以表示成:

$$q = -k(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial x} - k(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial y} - k(\theta) \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \quad (1)$$

式中,  $k(\theta)$  为非饱和导水率;  $\phi$  为  $x, y$  两个向上的水势;  $\phi_z$  为  $Z$  方向上的水势;  $q$  代表水通量。其中:

$$\phi_z = \phi + \varphi \quad (2)$$

$\varphi$  为  $Z$  方向上的重力势。

方程(1)可以写成:

$$q = -k(\theta) \frac{\partial \phi \partial \theta}{\partial \theta \partial x} - k(\theta) \frac{\partial \phi \partial \theta}{\partial \theta \partial y} - k(\theta) \frac{\partial \phi_z \partial \theta}{\partial \theta \partial z} \quad (3)$$

$$\text{令: } D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (4)$$

$$D_z(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta} \quad (5)$$

这样通量方程(3)式可以表达为:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} - D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (6)$$

与方程(6)所对应的非稳态流方程的经典表达式为<sup>[10]</sup>:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (7)$$

显然:

$$K(\theta) = [D_z(\theta) - D(\theta)] \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (8)$$

如果设  $D_z(\theta)$  与  $D(\theta)$  间总可以表达成如下的某个函数对应关系:

$$D_z(\theta) = G[D(\theta)] \quad (9)$$

由于重力作用为弱相互作用, 并且当  $D(\theta) \rightarrow 0$  时, 必有  $\theta \rightarrow 0$ , 所以有  $D_z(\theta) \rightarrow 0$ 。因此, 在非饱和流条件下, 现假定函数关系(9)可近似表达为如下的线性关系:

$$D_z(\theta) = G[D(\theta)] = b^2 D(\theta) \quad (10)$$

式中  $b$  为一常数。显然, 当土壤水顺重力方向运动时, 必有  $b > 1$ ; 当土壤水逆重力方向运动时, 必有  $0 < b < 1$ 。但因重力作用为弱相互作用, 所以  $b$  的取值不会偏离 1 太远。

则通量方程(6)转变成:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} - b^2 D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (11)$$

将方程(11) 带入到质量守恒方程中得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial (y)} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial (y)} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \left[ \frac{z}{b} \right]} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \left[ \frac{z}{b} \right]} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

现引入如下的坐标变换关系:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = bz' \quad (13)$$

则方程(12), 或方程(7) 在新坐标系  $(x', y', z')$  中的表达式为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] \quad (14)$$

方程(14) 与方程(7) 比较, 重力的作用通过坐标变换关系(13) 式被消除了。这样, 只要我们获得了方程(14) 的解, 然后通过如下的逆变换关系, 就可以得到方程(12) 或方程(7) 的解。

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z}{b} \quad (15)$$

如果方程(13) 是顺着重力场方向的运动所采用的变换, 则逆重力场方向运动所采用的变换其变换系数应当为  $1/b$ 。

## 1.2 柱坐标系中的变换

设一柱坐标为  $(\rho, \varphi, z)$ , 则柱坐标与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (16)$$

设变换后的坐标为  $(\rho', \varphi', z')$ 。方程(16) 表明变换与  $\rho, \varphi$  无关, 根据变换关系(13) 式和方程(16) 得柱坐标中的变换为:

$$\rho = \rho', \quad \varphi = \varphi', \quad z = bz' \quad (17)$$

相应的逆变换关系为:

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = \frac{z}{b} \quad (18)$$

## 1.3 球坐标系中的变换

设一球坐标为  $(r, \Theta, \varphi)$ , 则球坐标与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = r \sin \Theta \cos \varphi \\ y = r \sin \Theta \sin \varphi \\ z = r \cos \Theta \end{cases} \quad (19)$$

设变换后的坐标为  $(\rho', \varphi', z')$ 。根据方程(19), 由于  $z$  与  $r, \Theta$  有关, 所以变换同时涉及到这两个变量。根据变换关系(13) 式和方程(19) 得:

$$\begin{cases} x = x' = r' \sin \Theta' \cos \varphi \\ y = y' = r' \sin \Theta' \sin \varphi \\ z = bz' = br' \cos \Theta' \end{cases} \quad (20)$$

首先求  $r$  的变换:

因 
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$
 所以

$$r = (x'^2 + y'^2 + b^2 z'^2)^{\frac{1}{2}} = r' (\sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

再求  $\Theta$  的变换:

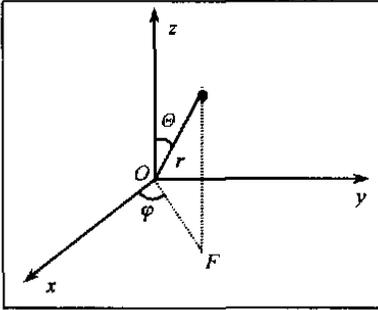


图 1 球坐标示意图

Fig. 1 Conceptual diagram of the spherical coordinates

根据图 1, 在原坐标系中,  $r$  在  $(x, y)$  平面上的投影为:

$$OF = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

相应地, 在变换后的坐标系中,  $r'$  在  $(x', y')$  平面上的投影为:

$$OF' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

因此, 根据变换关系式(13), 必定存在:  $OF = OF'$

根据图 1 有:

$$OF = r \sin \Theta \quad (25)$$

相应地在变换后的坐标系中同样有:

$$OF' = r' \sin \Theta' \quad (26)$$

因而有:

$$r \sin \Theta = r' \sin \Theta' \quad (27)$$

另外, 根据图 1 还可以得到:

$$r = \frac{z}{\cos \Theta} \quad (28)$$

因此, 在变换后的坐标系中同样有:

$$r' = \frac{z'}{\cos \Theta'} \quad (29)$$

将式(28)和式(29)代入式(27), 并考虑  $z = bz'$ , 得:

$$b \tan \Theta = \tan \Theta' \quad (30)$$

进而得关于  $\Theta$  的变换关系:

$$\Theta = n\pi + \arctan \left[ \frac{1}{b} \tan \Theta' \right] \quad (31)$$

式中  $n = 0, 1, 2, \dots$

球坐标中的变换关系可以归纳为:

$$r = r' (\sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Theta = n\pi + \arctan \left[ \frac{1}{b} \tan \Theta' \right], \quad \varphi = \varphi' \quad (32)$$

这样原球坐标系中的不饱和流方程<sup>[10]</sup>:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[ \sin \Theta D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right] + \cos \Theta \frac{\partial K(\theta)}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial K(\theta)}{\partial \Theta} \quad (33)$$

经变换关系(32)式变换为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[ r'^2 D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r'} \right] + \frac{1}{r'^2 \sin \Theta'} \frac{\partial}{\partial \Theta'} \left[ \sin \Theta' D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \Theta'} \right] + \frac{1}{r'^2 \sin^2 \Theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} \right] \quad (34)$$

相应的逆变换关系为:

$$r' = r (\sin^2 \Theta + \frac{1}{b^2} \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}}, \quad \Theta' = n\pi + \arctan (b \tan \Theta), \quad \varphi = \varphi' \quad (35)$$

## 2 变换关系的物理意义

前面的讨论表明, 重力场所带来的求解土壤水不饱和流方程的困难可通过线性坐标变换而被消除。现在讨论我们所采用的线性坐标变换的意义。

先看直角坐标系中的一维垂直运动的情况: 在图 2A 中, 坐标系为:  $(x', z')$ , 表明此时的重力场已被消除。如果在该坐标系中取一组等势线(或等含水量线):  $\theta_1(z' = a)$ 、 $\theta_2(z' = 2a)$ 、 $\theta_3(z' = 3a)$ 、 $\theta_4(z' = 4a)$ , 则这一组等势线是一组平行于  $x$  轴的直线, 且线与线之间的间距恒定为  $a$ 。

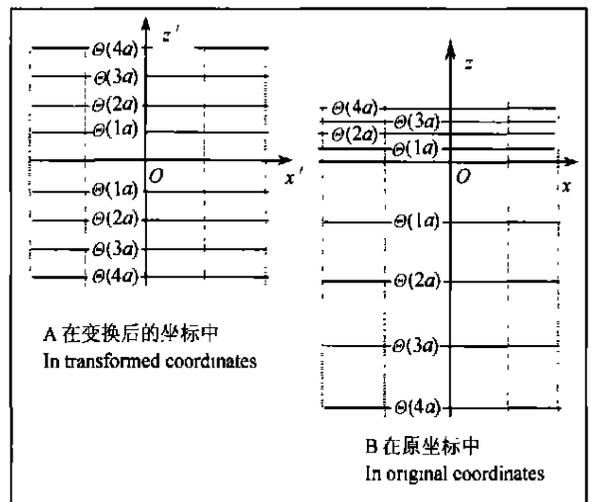


图 2 一维垂直流中的一组等势线

Fig. 2 A group of the equipotential lines in one dimensional vertical flow

如果设变换系数  $b = 2$ , 根据变换关系(13)式,  $(x', z')$  系中的这些等势线在原坐标系  $(x, z)$  中就变成了由图 2B 所示的直线。图中  $z$  方向为重力方向,  $z < 0$  是顺着重力场方向运动的情况,  $z > 0$  是逆着重力场方向运动的情况。在  $z < 0$  的顺重力场方向, 等势线之间的间距因重力的作用扩大了 2 倍; 在  $z > 0$  的逆重力场方向, 等势线之间的间距因重力的作用缩小了 2 倍。

如果  $x$  轴的轴线所在的位置代表供水的水源, 等势线代表不同时间的润湿锋的位置。图 2A 与图 2B 比较表明: 重力场对土壤水润湿前锋的运动速率的影响通过坐标变换而被消除, 而变换系数  $b$  反映了重力场对土壤水运动的作用强度。

其次, 看一个关于点源供水的二维球坐标情况: 在  $(r', \theta')$  坐标系中(此时重力场已被消除), 取一组等势线  $\theta(r' = a)$ 、 $\theta(r' = 2a)$ 、 $\theta(r' = 3a)$ 、 $\theta(r' = 4a)$ , 则这一组等势线为一组围绕供水点  $r' = 0$  的同心圆, 如图 3A 所示。

如果取  $b = 2$ , 根据变换关系(32)式, 这些等势线在坐标系  $(r, \theta)$  中就变成了图 3B 所示的曲线。图中  $z$  方向为重力方向,  $z < 0$  是顺着重力场方向运动的情况,  $z > 0$  是逆着重力场方向运动的情况。

从图 2 和图 3 可以看出, 重力场对土壤水运动的影响可看成是因重力而使坐标系沿  $z$  方向发生了压缩或拉伸, 因此这种影响可以通过改变坐标的标尺而被消除。

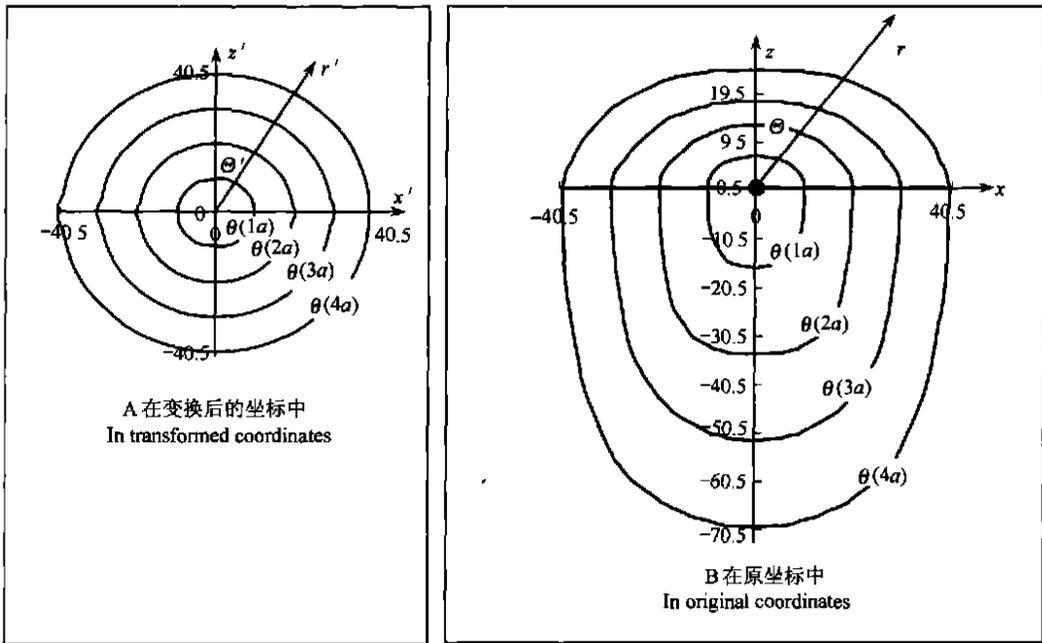


图 3 球坐标中的一组等势线

Fig. 3 A group of equipotential lines in spherical coordinates

### 3 线性坐标变换方法的应用与实验验证

#### 3.1 一维垂直流方程的解析解

土壤水一维垂直不饱流方程的经典表述为<sup>[11]</sup>:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (36)$$

现考虑如下定解条件:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0, & t > 0, z = 0 \\ \theta = \theta^0, & t = 0, z > 0 \end{cases} \quad (37)$$

如果采用传统方法, 显然方程(36)的解析解的获得是非常困难的。实际上, 到目前为止还没有一个以初等函数表达的真正解析解。下面我们采用坐标变换方法来求它的解析解。根据坐标变换关系式(13), 式(36)在新坐标系中的表达式为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z'} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z'} \right] \quad (38)$$

如果取:

$$D(\theta) = A e^{\beta \theta} \quad (39)$$

其中  $A$ 、 $\beta$  为常数。则方程(38)式的解析解为<sup>[11]</sup>:

$$\theta(z', t) = \frac{1}{\beta} \ln \left[ e^{\beta\theta_0} - \left( \frac{A e^{\beta\theta_0} - A e^{\beta\theta} - \frac{1}{2} m^2}{Am} \right) \frac{z'}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2A} \frac{z'^2}{t} \right] \quad (40)$$

式中:

$$m = \frac{z'_0}{\sqrt{t_0}} = \text{常数}$$

其中  $z'_0$  为变换后的坐标系中  $t_0$  时刻的润湿前锋的位置, 应用逆变换关系(15)式得:

$$m = \frac{z_0}{b} \frac{1}{\sqrt{t_0}} = \frac{n}{b} \quad (41)$$

式中: 
$$n = \frac{z_0}{\sqrt{t_0}} \quad (42)$$

将方程(41)代入方程(40)中, 并利用逆变换关系(15)式得重力场中垂直向下的不饱和流方程(36)式的解析解为:

$$\theta(z, t) = \frac{1}{\beta} \ln \left[ e^{\beta\theta_0} - \left( \frac{Ab^2 e^{\beta\theta_0} - Ab^2 e^{\beta\theta} - \frac{1}{2} n^2}{Ab^2 n} \right) \frac{z}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2Ab^2} \frac{z^2}{t} \right] \quad (43)$$

相应地垂直向上的不饱和流的解析解为:

$$\theta(z, t) = \frac{1}{\beta} \ln \left[ e^{\beta\theta_0} - \left( \frac{A e^{\beta\theta_0} - A e^{\beta\theta} - \frac{1}{2} b^2 n^2}{An} \right) \frac{z}{\sqrt{t}} - \frac{b^2 z^2}{2A t} \right] \quad (44)$$

这里, 我们首次得到了以初等函数的形式表达的关于土壤水一维垂直流方程的解析解。

### 3.2 解析解的实验验证

采用雷志栋等的实验资料来验证<sup>[10]</sup>。根据该实验资料, 可以得到当  $t = 140 \text{ min}$  时, 不同深度的含水率列于表 1。

根据该实验数据可以得到:

$$n = \frac{z_0}{\sqrt{t_0}} = \frac{27}{\sqrt{140}} = 2.08$$

根据线性关系(10)式及指数关系(39)式, 有:

$$G(\theta) = b^2 A e^{\beta\theta} \quad (45)$$

利用表 1 中的实验数据可以计算出  $G(\theta)$ , 其计算方法与计算  $D(\theta)$  的方法完全一样, 计算结果列于表 2。

表 1 不同深度的土壤含水率

Table 1 Volumetric water contents at different soil depth

$z$ (cm)	$\theta$ ( $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$ )
0	0.34
5.0	0.34
10.0	0.33
12.2	0.34
14.5	0.335
17.5	0.32
20.0	0.30
22.0	0.28
24.0	0.25
26.0	0.15
27.0	0.05

表 2 不同土壤含水率时的  $G(\theta)$  值

Table 2  $G(\theta)$  values at different soil water content

$\theta$ ( $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$ )	$G(\theta)$
0.34	9.80
0.33	11.6
0.32	9.10
0.30	3.24
0.28	1.68
0.25	0.950
0.23	0.430
0.15	0.090 0
0.090	0.033 9

利用表 2 中的数据, 采用最小二乘法可以得到:  $b^2 A = 0.002 56$ ,  $\beta = 24.31$ 。于是将有关参数代入(43)式得:

$$\theta(z, 140) = \frac{1}{24.31} \ln(3 887 - 106.3z - 1.395z^2) \quad (46)$$

用方程(46)作图并与实验数据和 Parlange 解的结果进行比较, 见图 4。

从图 4 可以看出, 采用这里的方法可以得到与实验相当吻合的结果, 其吻合的程度明显优于 Parlange 解。这里的求解的过程也比 Parlange 方法简单得多。更重要的是我们所得到的的是以初等函数表达的真正解析解, 而 Parlange 解法只能得到一个分离的数值。

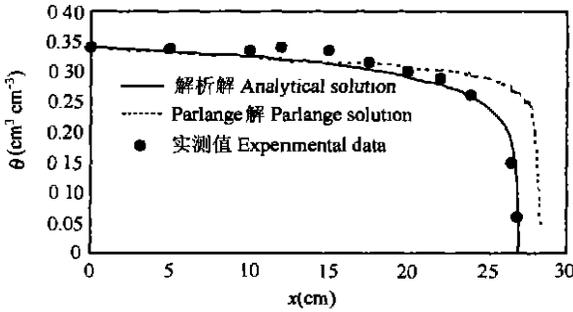


图 4 一维垂直流的理论曲线与实测值的比较

Fig. 4 Comparison of theoretical curves with experimental data of the one dimensional vertical flow

### 3.3 二维球坐标中润湿锋面的运移规律的验证

这里采用张思聪等的实验资料来验证<sup>[6,7]</sup>。根据该实验资料可以计算出坐标变换系数  $b$  为:

$$\begin{cases} b = 1.31, \dots z < 0 & \text{垂直向下} \\ b = 0.72, \dots z > 0 & \text{垂直向上} \end{cases} \quad (47)$$

根据前面的理论分析, 垂直向上与垂直向下的  $b$  值互为倒数。所以只要知道了  $z < 0$  时的  $b$  值, 就可以理论计算  $z > 0$  时的  $b$  值。根据方程(47)中  $z < 0$  的  $b$  值, 理论计算得到的  $z > 0$  的  $b$  值为: 0.76, 这个值非常接近实验值 0.72。表明垂直向上与垂直向下运动的  $b$  值的确互为倒数关系。

该实验数据表明, 在  $z = 0$  处(该处代表了土壤水运动未受重力场作用时的情况), 润湿前锋的运动与时间的关系为:

$$r' = 3.08t^{\frac{1}{2}} - 0.04t \quad (48)$$

根据变换关系式(32)和逆变换关系式(35), 润湿前锋的运动方程为:

$$\begin{aligned} r &= (3.08t^{\frac{1}{2}} - 0.04t) \sqrt{\sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta} \\ &= (3.08t^{\frac{1}{2}} - 0.04t) \\ &\quad \sqrt{\sin^2 [n\pi + \arctan(b \tan \Theta)] + b^2 \cos^2 [n\pi + \arctan(b \tan \Theta)]} \end{aligned} \quad (49)$$

图 5 是方程(49)的理论计算曲线与实验值的比较, 由此可以看出理论值与实验值吻合较好。

本文讨论的是一种线性坐标变换, 即假定变换系数  $b$  为常数时的情况。前面的讨论表明, 采用这种线性变换, 的确能够获得比较理想的结果。但是, 重力对土壤水运动的支配作用将随土壤含水量的增加而增强, 所以当土壤含水量相对较高时, 这种线性变换关系不一定严格成立。这时应采用非线性变换的方法。那么, 在什么条件下需要采用非线性变换,

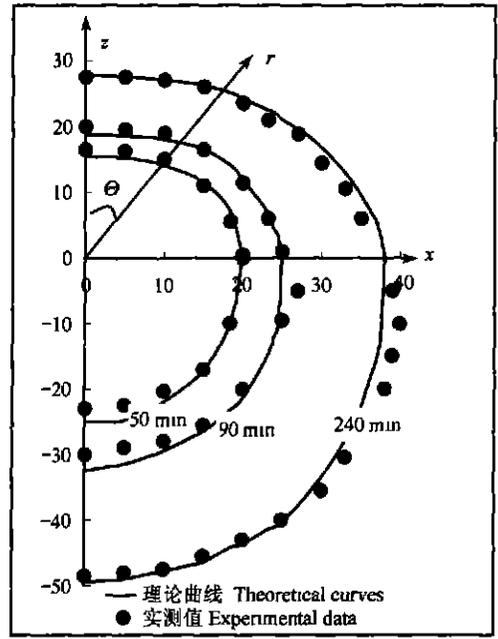


图 5 润湿锋运动的理论曲线与实验值的比较

Fig. 5 Comparison of theoretical curves with the experimental data of the wetting front

以及非线性变换如何处理等问题, 还需要做进一步的研究。

### 参考文献

[ 1 ] Philip J R. The concept of diffusion applied to soil water. Proc. Natl. Acad. Sci. India, 1955, 24(A): 93~ 104

[ 2 ] Philip J R. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. Soil Science, 1957, 83: 345~ 357

[ 3 ] Parlange J Y. Theory of water movement in soils: I. One dimensional adsorption. Soil Science, 1971, 111: 134~ 137

[ 4 ] Parlange J Y. Theory of water movement in soils: One dimensional infiltration with constant flux at the surface. Soil Science, 1972, 114: 1~ 4

[ 5 ] Broadbridge P, White P. Constant rate rainfall infiltration: a vertical nonlinear model I. Analytic solution. Water Resources Research, 1988, 24(1): 145~ 154

[ 6 ] 张思聪, 惠士博, 雷志栋, 等. 水平非饱和土壤水二维流动的准解析解. 水利学报, 1986, (3): 54~ 60. Zhang S C, Hui S B, Lei Z D, et al. Approximate analytic solutions of horizontal two dimensional flow of water in unsaturated soil (In Chinese). Journal of Hydraulic Engineering, 1986, (3): 54~ 60

[ 7 ] 张思聪, 惠士博, 雷志栋, 等. 渗灌的非饱和土壤水二维运动的探讨. 土壤学报, 1985, 22(3): 209~ 222. Zhang S C, Hui S B, Lei Z D, et al. Study on two dimensional flow of water in unsaturated soil under subsurface irrigation (In Chinese). Acta Pedologica Sinica, 1985, 22(3): 209~ 222

[ 8 ] Shao M A, Horton R. Integral method for estimating soil hydraulic properties. Soil Science Society of America Journal, 1998, 62:

585~ 592

- [ 9 ] 邵明安, 王全九, Horton R. 推求土壤水分运动参数的简单入渗法 I . 理论分析. 土壤学报, 2000, 37(1): 1~ 8. Shao M A, Wang Q J, Horton R. An infiltration method for estimating soil hydraulic properties I . Theoretical analysis ( In Chinese). Acta Pedologica Sinica, 2000, 37(1): 1~ 8
- [ 10 ] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学. 北京: 清华大学出版社, 1988. Lei Z D, Yang S X, Xie S C. Dynamics of Soil Water ( In Chinese). Beijing: Qinghua University Press, 1988
- [ 11 ] Han X F, Liu Y L. Coupled transfer of water and heat in red soil: experiment and numerical modeling. Pedosphere, 2001, 11 ( 2 ): 123~ 130
- [ 12 ] Xu S H, Du E B, Zhang J B. Numerical simulation of preferential flow of contaminants in soil. Pedosphere, 2001, 11(2): 131~ 136
- [ 13 ] 李航, 刘志强. 土壤水一维水平不饱和流动的拟解析解及其验证. 应用数学和力学(中文版), 1997, 18(7): 603~ 610. Li H, Liu Z Q. Almost analytic solutions and their tests of the horizontal diffusion equation for the movement of water in unsaturated soil. Applied Mathematics and Mechanics ( Chinese Edition), 1997, 18(7): 603~ 610
- [ 14 ] Li H, Liu Z Q. Almost analytic solutions and their tests of the horizontal diffusion equation for the movement of water in unsaturated soil. Applied Mathematics and Mechanics, 1997, 18(7): 647~ 655

## AN APPROACH TO TRANSFORMATION OF COORDINATES OF VERTICAL UNSATURATED WATER FLOW IN SOIL

Zhang Hong<sup>1</sup> Li Hang<sup>2†</sup> Wei Shiqiang<sup>3</sup>

(1. College of Agronomy and Life Sciences, Southwest Agricultural University, Chongqing 400716, China)

(2. Key Laboratory of Material Cycling in Pedosphere, Institute of Soil Science, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008, China)

(3. College of Resources and Environment, Southwest Agricultural university, Chongqing 400716, China)

**Abstract** Even though the numerical solution of the unsaturated water flow in soil has been widely applied, the analytical solution cannot be replaced in understanding the intrinsic mechanism of water flow in soil. Considering the nonlinear in nature of unsaturated water flow in soil, analytical solutions should be extremely difficult to obtain, especially as the gravity is taken into consideration. Thus, so far, there is not any analytical solution available for those issues with both the gravitational effect and the nonlinearity under consideration. In this contribution, a coordinate transformation approach is suggested, enabling us to avoid the obstacle of the gravity by removing the item of gravitational effect in the equation. Subsequently, the equation for describing unsaturated water flow in the gravitational field bears the same form as the equation neglecting the gravitational effect. As a result, for the first time, an analytical solution that can be expressed with the algebra form is obtained. The relational theoretical results, including the new method of coordinate transformation and the analytical solution advanced in this paper, have been verified in experiments.

**Key words** Vertical unsaturated water flow; Coordinate transformation; Analytical solution