

# 高次指数组合非线性模型在土壤侵蚀中的应用\*

牛振华<sup>1,2,3</sup> 王占礼<sup>1,2†</sup> 孙全敏<sup>2</sup> 张钰娴<sup>2</sup> 田风霞<sup>1</sup> 王英<sup>1</sup>  
谭贞学<sup>1</sup> 马春艳<sup>2</sup> 郑粉莉<sup>1</sup>

(1 中国科学院水利部水土保持研究所黄土高原土壤侵蚀与旱地农业国家重点实验室, 陕西杨凌 712100)

(2 西北农林科技大学, 陕西杨凌 712100)

(3 中国科学院研究生院, 北京 100039)

## APPLICATION OF NON-LINEAR MODELS OF HIGHER EXPONENTIAL COMBINATION IN STUDY ON SOIL EROSION

Niu Zhenhua<sup>1, 2, 3</sup> Wang Zhanli<sup>1, 2†</sup> Sun Quanmin<sup>2</sup> Zhang Yuxian<sup>2</sup> Tian Fengxia<sup>1</sup> Wang Ying<sup>1</sup>  
Tan Zhenxue<sup>1</sup> Ma Chunyan<sup>2</sup> Zheng Fenli<sup>1</sup>

(1 State Key Lab of Soil Erosion and Dryland Farming on Loess Plateau, Institute of Soil and Water Conservation, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Resources, Yangling, Shaanxi 712100, China)

(2 Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

(3 Graduated School, Chinese Academy Sciences, Beijing 100039, China)

关键词 土壤侵蚀; 统计模型; 非线性 GWS( $n, m$ ) 模型; 模拟精度

中图分类号 S181 文献标识码 A

土壤侵蚀是全球性的严重环境问题。揭示土壤侵蚀过程, 建立土壤侵蚀模型将为土地合理利用规划、水土保持措施优化配置、水土流失监测及水土保持减水减沙效益评价等生产实践提供重要科学依据和技术工具。土壤侵蚀预报模型按建模方法可分为经验模型与物理模型等, 其中, 经验模型主要是基于土壤侵蚀观测资料, 采取统计分析的方法模拟侵蚀产沙量与降雨、植被、土壤、地形等影响因子之间的关系。自 1953 年刘善建<sup>[1]</sup> 在国内首次建立了坡面土壤侵蚀预报方程以来, 不同学者根据各地的实际情况, 建立了诸多不同的土壤侵蚀经验模型<sup>[2~6]</sup>。由于国内土壤侵蚀物理模型研究起步晚, 还很不成熟, 而经验模型在侵蚀预报中一直处于重要地位, 继续强化对它的研究, 无疑可以进一步满足水土流失定量评价及水土保持决策等不同生产实践的迫切

需求。

为了进一步提高经验模型的预报精度, 克服经验模型固有的地域性强, 外延精度较差等不足, 本文通过对灰色离散序列高阶动态 GMS( $n, 1$ ) 模型<sup>[7,8]</sup> 的扩展, 建立了坡面侵蚀量与侵蚀因子之间的另一种关系模型—高次指数组合非线性 GWS( $n, m$ ) 模型。该模型具有信息包容量大、模型结构开放性强、适应性广泛等特点。模型的建立旨在更加精确地揭示和表述土壤侵蚀与其影响因子之间的关系, 为土壤侵蚀建模提供一种新的思路和方法。

## 1 模型构建

本文基于对文献[7,8] 中灰色离散序列高阶动态 GMS( $n, 1$ ) 模型的扩展, 建立了高次指数组合非

\* 国家 973 计划课题(2007CB407201); 国家自然科学基金重点项目专题(40335050-1); 黄土高原土壤侵蚀与旱地农业国家重点实验室基金项目(10501-143); 中国科学院知识创新工程重要方向项目(KZCX3-SW-422)资助

† 通讯作者, E-mail: zwang@nwsuaf.edu.cn

作者简介: 牛振华(1979~), 男, 甘肃人, 硕士研究生, 主要从事土壤侵蚀模型研究。E-mail: zhniu2004@sohu.com

收稿日期: 2005-08-25; 收到修改稿日期: 2006-05-25

线性模型。对单自变量非正态、非线性系统输出观测数据序列  $\{E(x)\}$ , 按其变动特征作如下变换:

$y(x) = f[E(x)]$ 。当  $\{y(x)\}$  序列具有单指数或多单指数复合衰减变动特征时, 为了能有效模拟这种特征的变化规律, 可采用文献[7, 8]中提出的灰色离散序列高阶动态 GMS( $n, 1$ ) 模型进行参数辨识:

$$y(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i e^{a_i x} \quad (1)$$

式中,  $B_0, \{B_i\}, \{a_i\}$  为待定参数,  $n$  为广义维数(可简称为维数),  $e = 2.718 28$ 。当  $1 \leq n \leq 4$  时, 式(1)的特征方程可用通用公式求解; 当  $n > 4$  时, 式(1)的特征方程求解比较繁琐。当  $\{y(x)\}$  序列具有单指数高次复合衰减变动特征时, 可将式(1)扩展为单变量高次指数组合非线性 GWS( $n, 1$ ) 模型:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{-kux} \quad (2)$$

式中,  $\{B_k\}$  为待定参数,  $u$  为待搜索参数。显然, 式(2)是常规高次方程的变换形式。由式(2)可得出:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -u \sum_{k=1}^n k B_k e^{-kux} \quad (3)$$

当  $u > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = B_0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = 0$ , 即  $\frac{dy(x)}{dx}$  具有振荡性递减变化特征。因此, 式(3)具有振荡递减非线性、非正态行为特征。

在式(1)基础上, 可构建出多变量高次指数组合非线性 GWS( $n, m$ ) 模型为:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{-kux_1} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^m C_{ki} X_i^{k\lambda u} e^{-kux_1} \quad (4)$$

式中,  $\{x_1\}$  为主因子数据序列,  $\{x_2\} \rightarrow \{x_m\}$  为辅助因子数据序列,  $\lambda$  为选择参数, 一般情况下取  $\lambda = 1$  或  $\lambda = 1/u$ 。式(4)中第二项为主因子作用项, 第三项为辅助因子作用项。高次指数组合非线性模型以误差平方和极小化作为判别准则, 采用最小二乘法进行参数搜索与辨识。对于单自变量高次指数组合非线性 GWS( $n, 1$ ) 模型式(2), 先取高维次数  $j$ , 任意给出待搜索参数的初始值  $u_0$ , 设中间变量为:

$$G_k(x, u_0) = e^{-ku_0 x} \quad k = 1, 2, 3 \dots j \quad (5)$$

则式(2)变换为:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^j B_k G_k(x, u_0) \quad (6)$$

对于既定的维数  $j$ , 通过计算机编程可搜索出误差平方和  $Q$  极小化条件下待搜索参数的优化值  $u(j)$ 。由小到大顺次改变高维次数  $j$ , 搜索出不同高维次数  $j$  时待搜索参数的优化值  $u(j)$ 。则最终待搜

索参数的优化值为:  $u = \max \{u(j)/j = 1, 2, \dots\}$ , 其相应的维数  $n$  随之而定。

对于多自变量高次指数组合非线性 GWS( $n, m$ ) 模型式(4), 采用式(5)、式(6)搜索出各自变量的维数及待搜索参数优化值, 找出主因子和辅助因子。对式(4), 设主因子作用项中间变量  $G_k(x_1)$ 、辅助因子作用项中间变量  $U_{ki}(x_i)$  分别为:

$$G_k(x_1) = e^{-kux_1} \quad (7)$$

$$U_{ki}(x_i) = x_i^{k\lambda u} e^{-kux_1} \quad (8)$$

则式(4)可简化为:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k G_k(x_1) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^m C_{ki} U_{ki}(x_i) \quad (9)$$

经过变量变换形式筛选, 选取下式:

$$y(x_1, x_2) = [E(x_1, x_2)]^{1/2} \quad (10)$$

应用式(9)可建立土壤侵蚀模数  $E$  随坡度  $S$ —雨强  $I$ 、坡长  $L$ —雨强  $I$ 、雨强  $I$ —降雨历时  $T$  而变化的三个 GWS(4, 2) 模型为:

$$E(I, S) = \left[ B_0 + \sum_{k=1}^4 B_k e^{-kul} + \sum_{k=1}^4 C_{k1} S e^{-kul} \right]^2 \quad (11)$$

$$E(I, L) = \left[ B_0 + \sum_{k=1}^4 B_k e^{-kul} + \sum_{k=1}^4 C_{k1} I e^{-kul} \right]^2 \quad (12)$$

$$E(I, T) = \left[ B_0 + \sum_{K=1}^4 B_k e^{-kut} + \sum_{k=1}^4 C_{k1} I e^{-kut} \right]^2 \quad (13)$$

式中,  $E(I, S); E(I, L); E(I, T)$  为侵蚀量( $\text{g cm}^{-2}$ );  $u, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}$  为参数。

## 2 材料与方法

采用室内人工模拟降雨试验的方法取得试验观测资料。试验土样取自黄土高原腹地的陕西省安塞县, 土壤类型为黄绵土。各项试验的前期土壤含水量为 14%, 容重为  $1.3 \text{ g cm}^{-3}$ 。试验小区宽 40 cm, 深 25 cm, 装土深度 22 cm。试验的坡度分别为  $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$  和  $30^\circ$ , 坡长分别为 40, 80, 120, 160 和 200 cm, 雨强分别为 0.80, 1.04, 1.70, 2.48 和  $2.84 \text{ mm min}^{-1}$ 。

该试验共进行了 45 个场次, 并对所有场次的试验重复进行一次。每场试验的降雨历时为 60 min。在各次试验中, 详细观测产流与侵蚀产沙的全过程, 开始产流后的前 15 min 内对所有观测项目分别间

隔 1、2、3、4、5 min 观测一次,以后每隔 5 min 观测一次。各次观测分别收集各时段的浑水总量,并通过测量浑水容量与重量及泥沙比重,计算获得侵蚀量。具体试验设计如表 1。

表 1 模拟降雨试验设计

坡度 $\theta = 20^\circ$		坡长 $L = 0.8 \text{ m}$		坡度 $\theta = 20^\circ$ 坡长 $L = 0.8 \text{ m}$	
雨强 $I$ ( $\text{mm min}^{-1}$ )	坡长 $L$ ( $\text{m}$ )	坡度 $\theta$ ( $^\circ$ )	雨强 $I$ ( $\text{mm min}^{-1}$ )	雨强 $I$ ( $\text{mm min}^{-1}$ )	历时 $T$ ( $\text{min}$ )
0.80	0.4	10	0.8	0.8	60
1.04	0.8	15	1.04	1.04	60
1.70	1.2	20	1.70	1.70	60
2.48	1.6	25	2.48	2.48	60
2.84	2.0	30	2.84	2.84	60

## 3 结果与分析

### 3.1 模型参数识别结果

将降雨试验数据随机划分为两部分,2/3 数据

用于拟合模型参数,1/3 数据用于模型的检验。由实测数据经模拟,得到模型参数值见表 2。

### 3.2 模型验证分析

模型用有效系数  $\text{coeff}$ 、平均误差率  $\delta$  来判别模型拟合结果的优劣。其计算公式分别为:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(1 - \hat{E}_i / E_i)^2]^{1/2} \times 100 \quad (14)$$

式中,  $\delta$  为平均误差率(%);  $\hat{E}_i$  为第  $i$  场降雨模拟侵蚀量 ( $\text{g cm}^{-2}$ ),  $E_i$  为第  $i$  场降雨实测侵蚀量 ( $\text{g cm}^{-2}$ ),  $N$  为试验观测样本量。

$$E_f = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (R_{obsi} - R_{cali})^2}{\sum_{i=1}^n (R_{obsi} - \overline{R_{obs}})^2} \quad (15)$$

式中,  $E_f$  为模型有效系数(无量纲);  $\overline{R_{obs}}$  为实测侵蚀量的平均值 ( $\text{g cm}^{-2}$ );  $R_{cali}$  为第  $i$  场降雨的计算降雨侵蚀量 ( $\text{g cm}^{-2}$ );  $R_{obsi}$  为第  $i$  场降雨的实测侵蚀量 ( $\text{g cm}^{-2}$ );  $n$  为计算的总降雨场次。三个 GWS(4, 2) 模型的模型有效系数  $E_f$ 、平均误差率  $\delta$  见表 3。

表 2 方程(11)~(13)中参数值

方程 \ 参数	$u$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{41}$
方程(11)	0.6	2.41	-19.69	81.77	-162.44	117.45	0.48	-3.21	8.80	-7.80
方程(12)	0.2	1.29	-12.86	49.47	-77.64	41.67	9.05	-45.26	82.41	-48.90
方程(13)	0.014	-0.37	6.78	-21.36	29.94	-10.09	-1.58	11.77	-18.29	8.20

表 3 模拟精度与评价

指标	模型有效系数 $E_f$	平均误差率 $\delta$ (%)
$E(I, T)$	0.96	15.30
$E(I, L)$	0.98	4.90
$E(I, S)$	0.99	4.66

常规柯布-道格拉斯函数型等土壤侵蚀统计模型的有效系数  $E_f$  多在 0.65~0.85 之间,平均误差率  $\delta$  多在 25%~40% 之间<sup>[9]</sup>,大多不能满足工程应用对模拟精度的要求。

从表 3 可以看出,用高次指数组合非线性 GWS(4, 2) 模型模拟土壤侵蚀的效果良好。表明土壤侵蚀随侵蚀环境因子的变化过程在本质上具有广义高维非线性特征,故采用本文模型进行模拟可达到良好结果。

## 4 结论

本文通过对灰色离散序列高阶动态 GMS( $m, 1$ ) 模型的扩展,建立了单变量高次指数非线性 GWS( $n, 1$ ) 模型。通过对待搜索参数  $u$  与维数  $n$  进行计算机搜索,经中间自变量生成,可将单变量一维模型扩展为多变量高次指数非线性 GWS( $n, m$ ) 模型。

GWS( $n, m$ ) 模型具有振荡递减非线性、非正态行为特征。通过室内人工模拟降雨对 GWS(4, 2) 模型进行了土壤侵蚀量随降雨强度-降雨历时、降雨强度-坡长、降雨强度-坡度变化的双自变量模拟,取得了良好的模拟精度。

### 参考文献

- [1] 刘善建. 天水水土流失测验的初步分析. 科学通报, 1953(12): 59~65, 54

- [ 2 ] Ni S X, Ma G B, Wei Y C, *et al.* An indicator system for assessing soil erosion in the loess plateau gully regions: A case study in the wangdonggou watershed, China. *Pedosphere*, 2004, 14(1): 37~ 44
- [ 3 ] 杨艳生. 区域性土壤流失预测方程的初步研究. *土壤学报*, 1990, 27(1): 73~ 79
- [ 4 ] 范瑞瑜. 黄河中游地区小流域土壤流失量计算方程的研究. *中国水土保持*, 1985(2): 12~ 18
- [ 5 ] 吕俊杰, 杨浩. 水土流失对水环境影响研究进展. *土壤*, 2003, 35(3): 198~ 203
- [ 6 ] 王占礼, 王亚云, 黄新会, 等. 黄土裸坡土壤侵蚀过程研究. *水土保持研究*, 2004, 11(4): 84~ 87
- [ 7 ] 孙全敏, 王占礼, 邵明安. 生物种群 Logistic 扩展模型灰色增量生成参数辨识方法及应用. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(8): 105~ 113
- [ 8 ] 孙全敏, 王占礼, 邵明安. 灰色非线性增量动态模型在农药残留量模拟中的应用. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(9): 125~ 129
- [ 9 ] 吴发启, 赵晓光, 刘秉正著. 缓坡耕地侵蚀环境及动力机制分析. 西安: 陕西科学技术出版社, 2001. 157~ 161